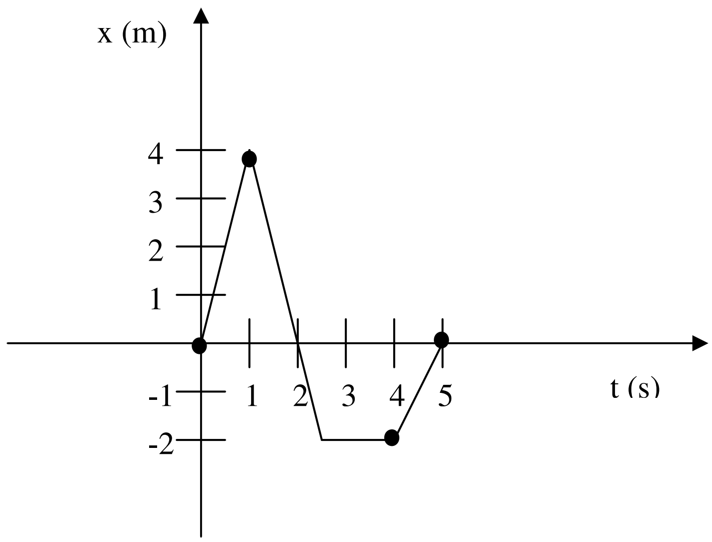
Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

1) Lo spostamento nel tempo di una certa particella che si muove lungo l'asse x è mostrato in figura. Trovare la velocità media negli intervalli di tempo:
a) da 0 a 1 s
b) da 0 a 4 s
c) da 1 a 5 s
d) da 0 a 5 s
Trovare la velocità istantanea della particella ai seguenti istanti:
e) t = 0.5 s
f) t = 2 s
g) t = 3 s
h) t = 4.5 s



---

a) la velocità media nell'intervallo di tempo da 0 a 1 s è

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{4-0}{1-0} = 4\frac{m}{s}$$

b) la velocità media nell'intervallo di tempo da 0 a 4 s è

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{-2-0}{4-0} = -\frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

c) la velocità media nell'intervallo di tempo da 1 a 5 s è

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{0-4}{5-1} = -1\frac{m}{s}$$

d) la velocità media nell'intervallo di tempo da 0 a 5 s è

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{0-0}{5-0} = 0\frac{m}{s}$$

La velocità istantanea ha come significato geometrico quello di pendenza della retta tangente alla curva x(t) nel punto considerato. La curva che rappresenta x(t) è fatta di segmenti di retta, quindi in ogni punto di questi segmenti di retta, la retta tangente coincide con la retta stessa. Quindi per ciascuno di questi segmenti la velocità istantanea coincide con la velocità media:

e) $$v(t=0.5)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(1)-x(0)}{1-0}=\frac{4-0}{1-0}=4\text{m/s}$$

f) $$v(t=2)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(2.5)-x(1)}{2.5-1}=\frac{-2-4}{1.5}=-4\text{m/s}$$

oppure

$$v(t=2)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(2)-x(1)}{2-1}=\frac{0-4}{1}=-4\text{m/s}$$

g) $$v(t=3)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(4)-x(2.5)}{4-2.5}=\frac{-2+2}{1.5}=\frac{0}{1.5}=0\text{m/s}$$

h) $$v(t=4.5)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(5)-x(4)}{5-4}=\frac{0+2}{1}=2\text{m/sec}$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

2) La posizione di una particella in moto lungo l'asse x varia nel tempo secondo l'espressione

$$x = 2 + 8t - 2t^2$$

dove x è in m e t in s. Trovare:
a) la sua velocità iniziale;
b) la sua accelerazione;
c) lo spostamento della particella nei primi 3 sec del moto;
d) la posizione in cui la particella si arresta momentaneamente;
e) la sua velocità media nei primi 3 s di moto.

Dal semplice confronto dell'espressione della posizione della particella

$$x = 2 + 8t - 2t^2$$

con l'espressione generale della posizione

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1)$$

ricaviamo

- la posizione iniziale della particella: $x_0 = 2$ m
- la velocità iniziale della particella: $v_0 = 8$ m/s
- l'accelerazione della particella: $a = -4$ m/s

Calcoliamo dapprima la posizione della particella all'istante t =3 s, sostituendo il valore del tempo nella eq. (1):

$$x\,(t=3) = 2 + 8\cdot 3 - 2\cdot 9 = 26 - 18 = 8 \text{ m}$$

A questo punto conoscendo già il valore della posizione x_0 all'istante t=0, possiamo rispondere alla domanda c)

$$x\,(t=3) - x\,(t=0) = 8 - 2 = 6 \text{ m}$$

Se la particella si arresta momentaneamente in quell'istante t la sua velocità è nulla. Dalla espressione generale della velocità possiamo ricavare l'istante di tempo t in cui la particella si arresta

$$v(t) = v_0 + a\,t \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0 + a\,t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{v_0}{a}$$

sostituendo i valori numerici si ha

$$t = -\frac{8}{(-4)} = 2\text{s}$$

allora la posizione al tempo t = 2 s è:

$$x\,(t=2) = 2 + 8\cdot 2 - 8 = 10 \text{ m}$$

Alternativamente saremmo potuti arrivare allo stesso risultato utilizzando la seguente espressione:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x-x_0)$$

$$- v_0^2 = + 2\,a\,(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = -\frac{v_0^2}{a} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{v_0^2}{a}$$

sostituendo i valori numerici si ha

$$\mathbf{x} = 2 - \frac{64}{(-4)} = \mathbf{10m}$$

e) la velocità media della particella nei suoi primi tre secondi è data da

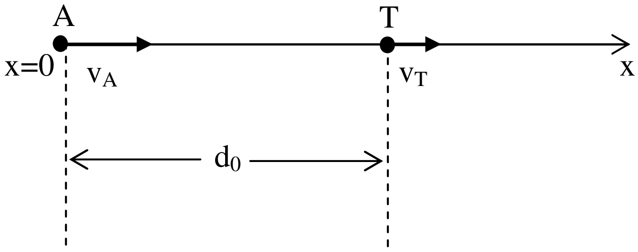
$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta x_{03}}{\Delta t} = \frac{6}{3} = \mathbf{2m/s}$$

Alternativamente si poteva procedere nel seguente modo

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\left[v_0 + v(t=3)\right] = \frac{1}{2}\left[8 + (8 + (-4)\cdot 3)\right] = \mathbf{2m/s}$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

3) Una particella A passa al tempo t=0 dall'origine con velocità costante $v_A > 0$; un'altra particella T, distante d_0 da A, si muove con velocità costante $v_T < v_A$. A quale istante di tempo e in quale punto x e la particella A sorpassa la particella T?



Le particelle A e T si muovono di moto rettilineo uniforme. Scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui si trova la particella A avremo $x_{0A} = 0$ e $x_{0T} = d_0$. Le leggi orarie saranno quindi

$$x_A(t) = x_{0A} + v_A t = v_A t$$
$$x_T(t) = x_{0T} + v_T t = d_0 + v_T t$$

Affinché la particella A possa sorpassare la particella T, ci dovrà essere un certo istante di tempo t^* per cui $x_A(t^*) = x_T(t^*)$. Avremo quindi:

$$v_A t^* = d_0 + v_T t^* \quad \Rightarrow \quad (v_A - v_T)\, t^* = d_0$$

$$t^* = \frac{d_0}{v_A - v_T}$$

Sostituendo quindi questo valore in $x_A(t)$ otterremo il punto in cui la particella A sorpassa la particella T

$$x_A = \frac{v_A}{v_A - v_T} d_0$$

(Paradosso di Zenone; A = Achille; T = Tartaruga)

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

4) Avete frenato la vostra auto dalla velocità di 85 km/h fino alla velocità di 45 km/h su una distanza di 105 m.
a) Supponendo l'accelerazione costante durante tutta la frenata, quanto è l'accelerazione della macchina?
b) In quanto tempo avviene la frenata?
c) Se continuate a frenare con la stessa accelerazione, in quanto tempo la macchina si ferma?
d) Quanta strada percorre?

---

a) Consideriamo positiva la direzione della velocità e scegliamo l'origine in modo che all'inizio della frenata sia $x_0 = 0$. Al tempo t = 0 la velocità iniziale è $v_0 = 85$ km/h = 23.6 m/s mentre al tempo t (incognito) v = 45 km/h =12.5 m/s e lo spostamento vale 105 m. Dall'equazione:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

ricaviamo l'accelerazione

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{12.5^2 - 23.6^2}{2 \cdot 105} = -1.91\, m/s^2$$

b) Il tempo in cui avviene la frenata si ricava dall'equazione:

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_0 + \mathrm{at} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{t} = \frac{\mathrm{v} - \mathrm{v}_0}{\mathrm{a}} = \frac{12.5 - 23.6}{-1.91} = 5.8\ s$$

c) Conoscendo l'accelerazione, dobbiamo calcolare il tempo t necessario a passare dalla velocità iniziale $v_0 = 85$ km/h alla velocità finale v = 0 in cui la macchina si ferma.

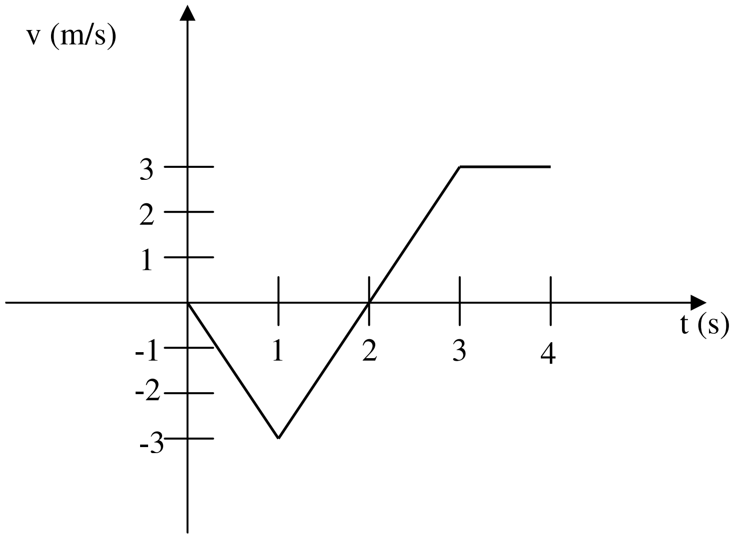
$$0 = \mathrm{v}_0 + \mathrm{at} \quad \mathrm{t} = -\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{a}} = -\frac{23.6}{-1.91} \cong 12.3\ s$$

d) La distanza totale percorsa è uguale a

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow x = 146 m$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

5) La velocità di una particella in funzione del tempo è mostrata in figura. A *t=0* la particella è in *x=0*.
a) Tracciare il grafico dell'accelerazione in funzione del tempo.
b) Determinare l'accelerazione media della particella nell'intervallo di tempo da *t = 1s* a *t = 4s*.
c) Determinare l'accelerazione istantanea della particella a *t = 2s*.



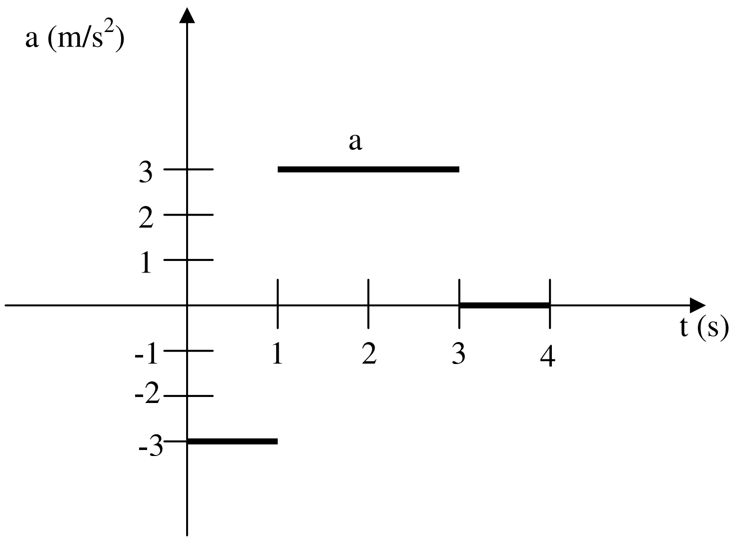
---

a) Essendo il grafico della velocità in funzione del tempo costituito da segmenti rettilinei, per ciascuno di questi l'accelerazione istantanea coincide con quella media

$0 \le t < 1\text{sec} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(1) - v(0)}{1 - 0} = \frac{-3 - 0}{1} = -3\text{m/s}^2$

$1 \le t < 3\text{sec} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = \frac{3 + 3}{2} = 3\text{m/s}^2$

$3 \le t < 4\text{sec} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(4) - v(3)}{4 - 3} = \frac{3 - 3}{1} = 0\text{m/s}^2$



b) L'accelerazione media nell'intervallo di tempo $1s \le t \le 4s$ è pari, per definizione, a:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(4) - v(1)}{4 - 1} = \frac{3 + 3}{3} = 2m/s^2$$

c) Per quanto detto al punto a), essendo l'istante $t = 2s$ contenuto nel secondo intervallo, l'accelerazione istantanea $a(2) = 3m/s^2$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

6) Una particella si muove lungo l'asse x con una accelerazione che è proporzionale al tempo, secondo l'espressione $a = 30t$, dove a è in m/s^2. Inizialmente la particella è in quiete nell'origine. Trovare:
a) la velocità istantanea
b) la posizione istantanea in funzione del tempo.

---

a) Dai dati del problema sappiamo che all'istante $t = 0,\ x = 0$ e $v = 0$.
Dalla definizione di accelerazione istantanea:

$$a = \frac{dv}{dt} = 30t \qquad \Rightarrow \qquad dv = 30tdt$$

A questo punto la velocità istantanea si ottiene integrando l'ultima espressione:

$$v(t) = \int 30tdt + C$$

dove C è una costante di integrazione. Eseguendo l'integrale definito si ha:

$$v(t) = 30\frac{t^2}{2} + C \qquad (1)$$

Imponendo la condizione iniziale v(0) = 0 nella (1) si vede che C = 0 e quindi

$$v(t) = 15t^2$$

b) Procedendo in modo analogo, ricordiamo la definizione cinematica di velocità istantanea:

$$v = \frac{dx}{dt} = 15t^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 15t^2dt$$

Integrando quest'ultima espressione si ottiene:

$$x(t) = \int 15t^2dt + A$$

dove A è una costante di integrazione. Eseguendo l'integrale definito:

$$x(t) = 15\frac{t^3}{3} + A \qquad (2)$$

Imponendo la condizione iniziale x(0) = 0 nella (2) si vede che A = 0 e quindi

$$x(t) = 5t^3$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

7) All'istante in cui il semaforo diventa verde un'automobile parte con un'accelerazione costante $a = 1.8\ m/s^2$. Nello stesso istante un camion muovendosi con una velocità costante $v_C = 9\ m/s$, raggiunge e sorpassa l'automobile:
a) a quanti metri dal punto di partenza l'automobile sorpasserà il camion?
b) a che velocità starà viaggiando in quell'istante? (è utile tracciare un grafico qualitativo di x in funzione di t per ciascun veicolo)

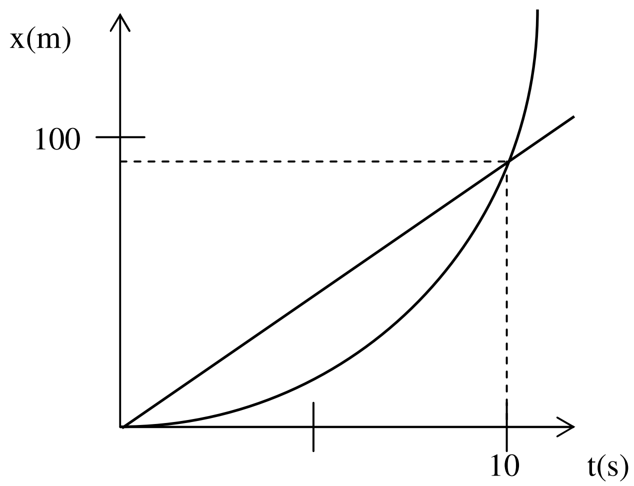
L'automobile ferma nell'origine all'istante t=0 fa un moto uniformemente accelerato rappresentato dall'equazione:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}1.8t^2 = 0.9t^2$$

Il grafico di x in funzione di t è una parabola con il vertice nell'origine.
Il moto del camion è invece rettilineo uniforme, rappresentato dall'equazione:

$$x_C(t) = v_C t = 9t$$

ed il suo grafico è una retta passante per l'origine degli assi.



a) Nell'istante in cui l'automobile sorpassa il camion i due valori della x devono coincidere:

$$\frac{1}{2}at^2 = v_C t$$
$$\frac{1}{2}at^2 - v_C t = 0$$

Questa equazione algebrica di secondo grado spuria ha due radici:

$$t_1 = 0 \qquad t_2 = \frac{2v_C}{a} = \frac{2 \cdot 9}{1.8} = 10s$$

La prima corrisponde all'istante in cui il camion sorpassa l'automobile al semaforo; la seconda è la soluzione cercata. L'automobile sorpasserà il camion nella posizione

$$x_A(t_2) = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 1.8\cdot 10^2 = 90m$$

Ovviamente all'istante t_2 la posizione del camion è la stessa dell'automobile

$$x_C(t_2) = v_C t_2 = 9\cdot 10 = 90m$$

b) la velocità dell'automobile è espressa dalla formula:

$$v_A(t) = at = 1.8t$$

all'istante t_2 essa ha il valore

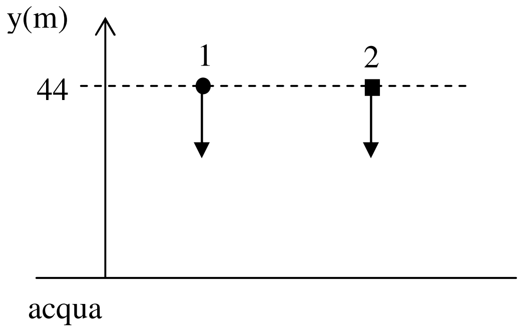
$$v_A(t_2) = at_2 = 1.8\cdot 10 = 18m/s$$

doppio del valore della velocità del camion.

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

8) Una pietra è lasciata cadere in acqua da un ponte alto 44m sull'acqua. Un'altra pietra è gettata verticalmente dopo un secondo dalla partenza della prima. Le pietre colpiscono l'acqua allo stesso istante.
a) Qual è la velocità iniziale della seconda pietra?
b) Portare in un grafico lo spazio in funzione del tempo per le due pietre, ponendo t = 0 nell'istante in cui la prima pietra è abbandonata.

Scegliamo come sistema di riferimento l'asse y rivolto verso l'alto, con l'origine posto al confine acqua/ponte.
I dati del problema sono:
$v_{0,1}= 0$
$y_0= 44m$
$t_R= 1s$



L'equazione del moto per la caduta libera è

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

per quanto riguarda la prima pietra l'equazione del moto diventa:

$$y_1(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

per la seconda pietra, che parte in ritardo di 1 s rispetto la prima, la legge oraria è:

$$y_2(t) = y_0 + v_{0,2}(t - t_R) - \frac{1}{2} g (t - t_R)^2$$

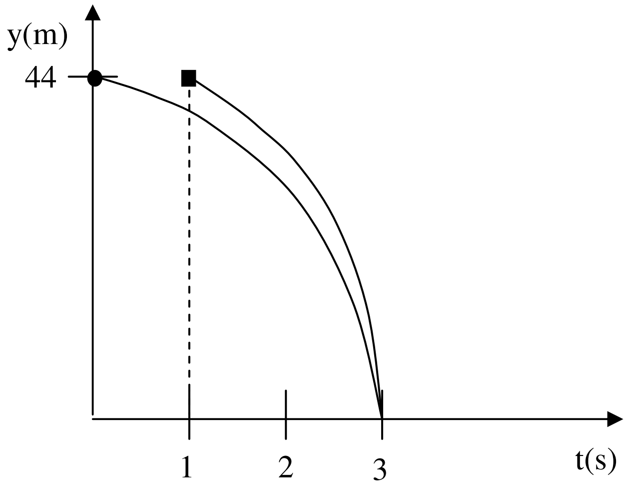
La prima pietra colpisce l'acqua all'istante t_A, per il quale deve verificarsi che $y_1(t_A) = 0$. Possiamo ricavare quindi t_A:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g t_A^2 \Rightarrow t_A = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{9.8}} \cong 3s$$

a) Per calcolare la velocità iniziale della seconda pietra, possiamo sfruttare la condizione data dal problema: le pietre colpiscono l'acqua allo stesso istante. Quindi deve valere $y_2(t_A) = 0$. Da questa condizione possiamo ricavare $v_{0,2}$:

$$0 = y_0 + v_{0,2}(t_A - t_R) - \frac{1}{2} g (t_A - t_R)^2$$

$$v_{0,2}(t_A - t_R) = \frac{1}{2} g (t_A - t_R)^2 - y_0 \;\; \Rightarrow \; v_{0,2} = \frac{\frac{1}{2} g (t_A - t_R)^2 - y_0}{(t_A - t_R)} = \frac{\frac{1}{2} 9.8 \cdot (2.997 - 1)^2 - 44}{(2.997 - 1)} \cong -12.3m$$



b) Notiamo che all'istante $t_R = 1s$, in cui parte la seconda pietra, la prima pietra ha velocità

$$v_1 = -gt = -9.8m/s$$

Inoltre all'istante $t_A \cong 3s$, avremo che:

$v_1(t_A) = -29.4$ m/s
$v_2(t_A) = -12.3-9.8\cdot(3-1)=-31.9m/s$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

9) Un treno partito da fermo, si muove con accelerazione costante. A un certo istante viaggia a 9 m/s e dopo 48 metri viaggia a 15 m/s. Calcolare:
a) l'accelerazione;
b) il tempo che impiega a percorrere i 48 metri;
c) il tempo richiesto per raggiungere la velocità di 9 m/s;
d) la distanza tra il punto di partenza e quello il cui il treno ha raggiunto una velocità di 9 m/s.

Il treno si muove di moto uniformemente accelerato.

a) dall'equazione

$$v_x^2 - v_{x,0}^2 = 2a(x - x_0)$$

ricaviamo l'accelerazione

$$a = \frac{v_x^2 - v_{x,0}^2}{2(x - x_0)} = \frac{15^2 - 9^2}{2 \cdot 48} = 1.5\mathrm{m/s^2}$$

b) dall'equazione

$$v_x = v_{x,0} + at$$

ricaviamo il tempo impiegato a percorrere i 48 m

$$t = \frac{v_x - v_{x,0}}{a} = -\frac{-15 - 9}{1.5} = 4\mathrm{s}$$

c) dall'equazione

$$v_x = v_{x,0} + at$$

ricaviamo il tempo richiesto per raggiungere la velocità di 9 m/s

$$9 = 0 + 1.5 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 6\mathrm{s}$$

d) posto l'origine del nostro sistema di riferimento nel punto di partenza del treno, la distanza cercata si ottiene dalla seguente equazione

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 6^2 = 27\mathrm{m}$$

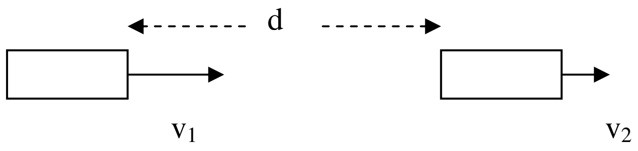
Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

10) Il macchinista di un treno che sta viaggiando con velocità v_1 vede a una distanza d sul suo stesso binario un altro treno che si sta muovendo nella sua stessa direzione con una velocità più bassa v_2. Egli frena immediatamente e dà al suo treno una decelerazione costante -a. Dimostrare che

se $\quad d > \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \quad$ non ci sarà scontro

se $\quad d < \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \quad$ avverrà uno scontro

---



Le leggi orarie dei due treni sono

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1,0} + v_1 t - \dfrac{1}{2} a t^2 \\ x_2(t) = x_{2,0} + v_2 t \end{cases}$$

Scelgo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione del primo treno cosicché:

$x_{1,0} = 0$
$x_{2,0} = d$

Le leggi orarie diventano quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1 t - \dfrac{1}{2} a t^2 \\ x_2(t) = d + v_2 t \end{cases}$$

Se si ha scontro deve esistere un istante di tempo t_S tale che $x_1(t_S)=x_2(t_S)$:

$$v_1 t_S - \frac{1}{2} a t_S^2 = d + v_2 t_S$$

$$\frac{1}{2} a t_S^2 - (v_1 - v_2) t_S + d = 0$$

$$t = \frac{(v_1 - v_2) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - \frac{1}{2} ad}}{2 \cdot \frac{1}{2} a}$$

Si hanno soluzioni reali (cioè c'è scontro) solo se l'argomento della radice quadrata è maggiore di zero, cioè:

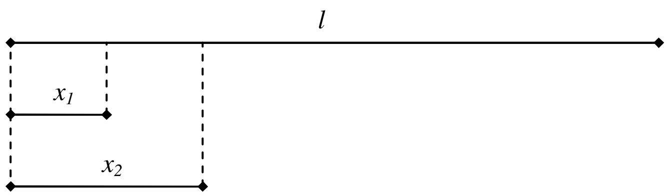
$$(v_1 - v_2)^2 - 2ad > 0 \quad \Rightarrow \quad (v_1 - v_2)^2 > 2ad \quad \Rightarrow \quad d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica
Gettys pag. 50 n° 3-35

11) Il moto di un velocista durante una corsa può essere approssimato con un'accelerazione costante di modulo *3.7 m/s²*. Posto $t = 0$ in corrispondenza dell'inizio della corsa, si determini il tempo impiegato dal corridore a percorrere:

a) *5 m*;
b) *10 m*.

Soluzione



$a = 3.7\ m/s^2$

$x_1 = 5\ m$

$x_2 = 10\ m$

a) $t_1 = ?$

b) $t_2 = ?$

La legge oraria che descrive il moto del corridore è quella del moto uniformemente accelerato e cioè:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

che, essendo in questo caso la posizione iniziale $x_0 = 0$ e la velocità iniziale nulla ($v_0 = 0$), si riduce alla:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

da cui:

$$t^2 = \frac{2x}{a}$$

e quindi

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

Applicandola nei due casi, si ottiene:

a) $$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{3.7}} \cong 1.64s$$

b) $$t_2 = \sqrt{\frac{2x_2}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{3.7}} \cong 2.32s$$

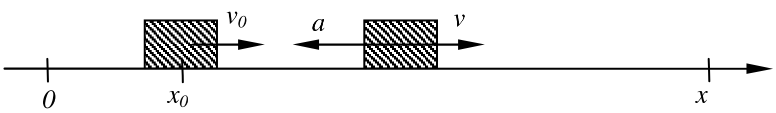
Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

Gettys pag. 50 n° 3-37

12) Un'automobile si trova *18 m* oltre l'ingresso di un ristorante e viaggia alla velocità di *16 m/s* quando il guidatore schiaccia il freno. La velocità del veicolo diminuisce con un'accelerazione costante di modulo $2.3\ m/s^2$.
Quanto tempo dopo l'inizio della frenata l'automobile sarà *65 m* oltre l'ingresso?

Soluzione

$x_0 = 18\ m$



$v_0 = 16\ m/s$

$a = -2.3\ m/s^2$

$x = 65\ m$

$t = ?$

Il moto dell'automobile è uniformemente decelerato e quindi la legge oraria è:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

dove x_0 è lo spazio iniziale percorso dall'automobile, x è lo spazio percorso nel tempo cercato, v_0 è la velocità dell'automobile prima di iniziare la frenata ed a è la decelerazione (quindi di segno opposto alla velocità), quindi:

$$65 = 18 + 16 \cdot t - \frac{1}{2} 2.3 \cdot t^2$$

da cui:

$$1.15\ t^2 - 16\ t + 47 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4\ (1.15)(47) = 39.8$$

$$t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{39.8}}{2 \cdot 1.15}$$

e si ottengono:

$$t_1 = 4.2\ s$$

$$t_2 = 9.7\ s$$

la seconda soluzione è matematicamente possibile, ma fisicamente non significativa. Corrisponderebbe infatti al passaggio dell'automobile per il punto $x = 65\ m$ con velocità uguale in modulo, ma diretta in verso opposto.

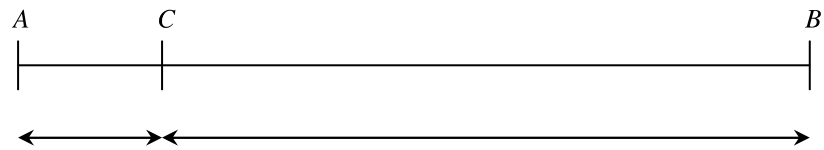
<u>**Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica**</u>

Gettys pag. 51 n° 3-1

13) Un velocista corre i *100 m* piani in *10 s*. Si approssimi il moto ipotizzando un'accelerazione costante per gli altri *85 m*.
Si determinino:

a) la sua velocità;
b) il tempo impiegato per percorrere i primi *15 m*;
c) il tempo necessario per percorrere gli altri *85 m*;
d) il modulo dell'accelerazione per i primi *15 m*.

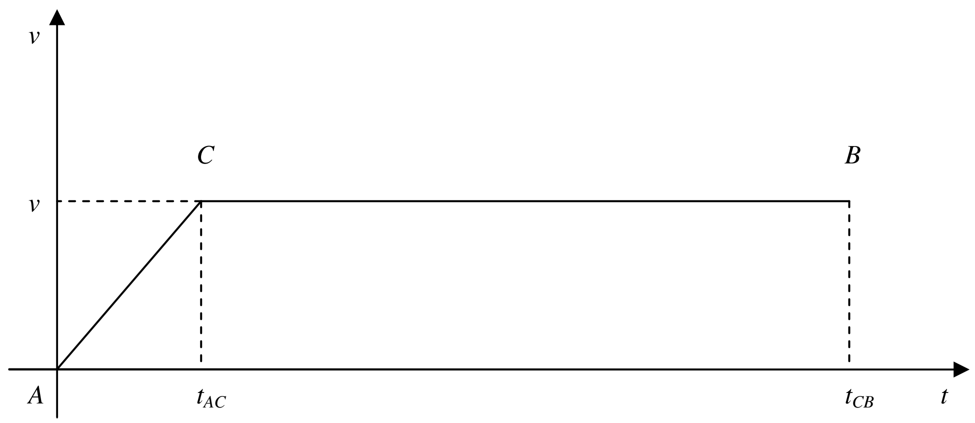
Soluzione



AB = 100 m

AC = 15 m

CB = 85 m



$t_{AB} = 10\ s$

a) $v_C = ?$

b) $t_{AC} = ?$

c) $t_{CB} = ?$

d) $a = ?$

Il moto del velocista è uniformemente accelerato nel tratto *AC* e uniforme nel tratto *CB*. Indichiamo con v_C la velocità raggiunta nel punto C, velocità che si mantiene costante lungo tutto il tratto CB. Poiché il velocista parte da fermo, tale velocità è semplicemente:

$$v_C = a\, t_{AC}$$

Il tempo impiegato a percorrere il tratto CB è semplicemente $t_{CB}=10s - t_{AC}$. Le equazioni per il moto uniformemente accelerato nel tratto AC e il moto rettilineo uniforme nel tratto CB sono quindi:

$$15 = \frac{1}{2}\, a\, t_{AC}^2 = \frac{1}{2}\, at_{AC}\; t_{AC} = \frac{1}{2}\, v_C\; t_{AC}$$

$$85 = v_C (10 - t_{AC}\ )$$

Sostituendo i valori numerici dati nella traccia si ottiene il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$85 = v_C (10 - t_{AC})$$
$$30 = v_C \; t_{AC}$$

$$85 = 10 \cdot v_C - v_C \; t_{AC}$$
$$30 = v_C \; t_{AC}$$

$$85 = 10 \cdot v_C - 30$$
$$30 = v_C \; t_{AC}$$

$$115 = 10 \cdot v_C$$
$$30 = v_C \; t_{AC}$$

$$v_C = 11.5 m/s$$
$$t_{AC} = \frac{30}{11.5} \cong 2.6 s$$

L'intervallo di tempo t_{CB} è semplicemente

$$t_{CB} = 10 - t_{AC} \cong 7.4 s$$

Il modulo dell'accelerazione si ricava dalla

$$v_C^2 = 2 \, a \, \overline{AC}$$

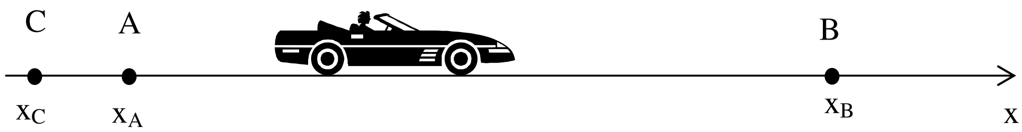
cioè:

$$a = \frac{v_C^2}{2 \cdot \overline{AC}} = 4.4 m/s^2$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

14) Un'automobile che si muove con accelerazione costante percorre una distanza di *50 m* (tra i punti *A* e *B*) in *6 s*. La sua velocità quando arriva in *B* è $v_B = 15\ m/s$:
a) qual è la sua accelerazione?
b) quale era la sua velocità in *A*?
c) a che distanza da *A* era partita?

Soluzione



Il moto è uniformemente accelerato. Valgono quindi le relazioni:

$$v(t) = v_0 + at \qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad v^2 - v_o^2 = 2a(x - x_0)$$

Scegliamo come istante iniziale $t_0 = 0$ quello in cui l'automobile parte da x_A con velocità v_A incognita. La velocità iniziale v_A è legata alla velocità finale v_B (nota e pari a *15 m/s*), all'accelerazione *a* (incognita) e al tempo *t* (noto e pari a *6s*) dall'equazione

$$v_B = v_A + at \quad \rightarrow \quad v_A = v_B - at = 15 - 6a$$

L'equazione che lega x_B, x_A, v_A, a e t è quindi:

$$x_B = x_A + v_A t + \frac{1}{2}at^2$$

In questa equazione non conosciamo né a né v_A, mentre sono noti $x_B - x_A = 50m$ e il tempo $t = 6s$. Se sostituiamo l'espressione ricavata sopra per v_A, otteniamo un'equazione nella sola incognita a:

$$x_B - x_A = v_A t + \frac{1}{2}at^2 = (v_B - at)\cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$50 = (15 - a\cdot 6)\cdot 6 + \frac{1}{2}a \cdot 36$$

$$50 = 90 - 36a + 18a$$

$$18a = 40$$

$$a = \frac{20}{9}\ m/s^2 \cong 2.22\ m/s^2$$

b) Ricaviamo adesso v_A:

$$v_A = v_B - at = 15 - 6a = 15 - 6\cdot\frac{20}{9} \cong 1.67\ m/s$$

c) La distanza percorsa partendo da ferma (dal punto C indicato in figura) prima di arrivare in A può essere ottenuto alla relazione:

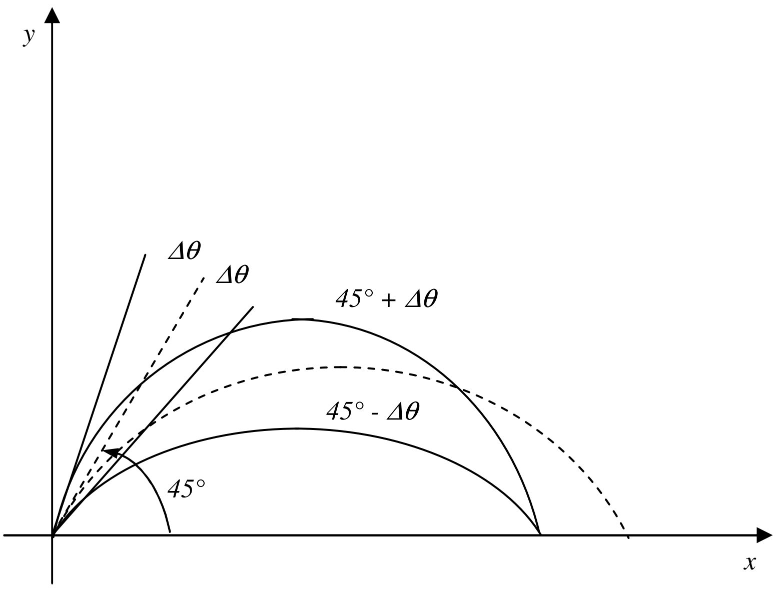
$$v_A^2 - v_C^2 = 2a(x_A - x_C)$$

$$(x_A - x_C) = \frac{v_A^2}{2a} \cong 0.63\ m$$

<u>Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica</u>

Moto del proiettile

15) Dimostrare che per angoli di tiro superiori o inferiori a *45°* della stessa quantità $\Delta\theta$ le gittate sono uguali.



La funzione che individua la gittata $G(\theta)$ in funzione dell'angolo di tiro iniziale è:

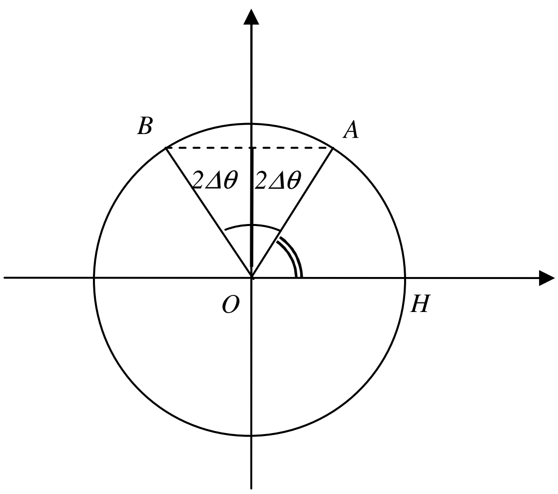
$$G(\theta) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Applicando questa al caso in cui l'angolo di tiro sia $45° + \Delta\theta$ e anche $45° - \Delta\theta$ si ricava:

$$G(45° + \Delta\theta) = \frac{v_0^2}{g}\sin[2(45° + \Delta\theta)] = \frac{v_0^2}{g}\sin(90° + 2\Delta\theta)$$

$$G(45° - \Delta\theta) = \frac{v_0^2}{g}\sin[2(45° - \Delta\theta)] = \frac{v_0^2}{g}\sin(90° - 2\Delta\theta)$$

Per le proprietà della funzione *sin*, si ha che: $\sin(90° + 2\Delta\theta) = \sin(90° - 2\Delta\theta) = \cos 2\Delta\theta$



$H\hat{O}A = 90° - 2\Delta\theta$

$H\hat{O}B = 90° + 2\Delta\theta$

Allora le due espressioni precedenti sono uguali, cioè

$$G(45° + \Delta\theta) = G(45° - \Delta\theta).$$

<u>Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica</u>
Moto del proiettile

16) Calcolare l'angolo di tiro a cui l'altezza massima raggiunta dal proiettile è uguale alla gittata.

Soluzione

L'altezza massima raggiunta è data dalla:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

mentre la gittata è data da:

$$G(\theta) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

quindi la condizione che deve essere soddisfatta sarà:

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

da cui, semplificando, si ottiene:

$$\frac{\sin^2 \theta}{2} = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$sin^2 \theta = 4\ sin \theta\, cos \theta$$

$$sin \theta = 4\ cos \theta$$

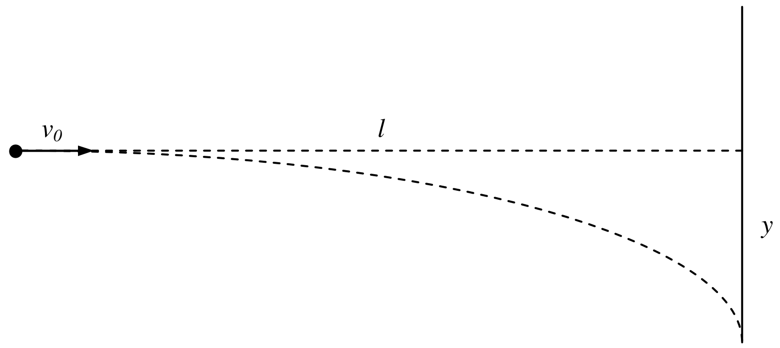
$$tg \theta\ = 4$$

$$\theta = arctg\ 4 \cong 76°$$

<u>**Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica**</u>

17) Un fucile con velocità di bocca *500 m/s* spara un proiettile in un piccolo bersaglio distante *50 m*. A quale altezza al di sopra del bersaglio deve essere puntato il fucile per poter colpire il bersaglio?

Soluzione



$l = 50\ m$

$v_0 = 500\ m/s$

$\theta = 0°$

$y = ?$

Il fucile si deve sollevare di un'altezza *y* uguale alla distanza verticale di cui cade il proiettile nel tempo che impiega a percorrere i *50 m*, cioè:

$$y = x tg\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

sostituendo i valori

$$y = 50 \cdot tg 0° - \frac{9.8}{2 \cdot (500)^2 \cos^2 0°} (50)^2 = -0.049 m$$

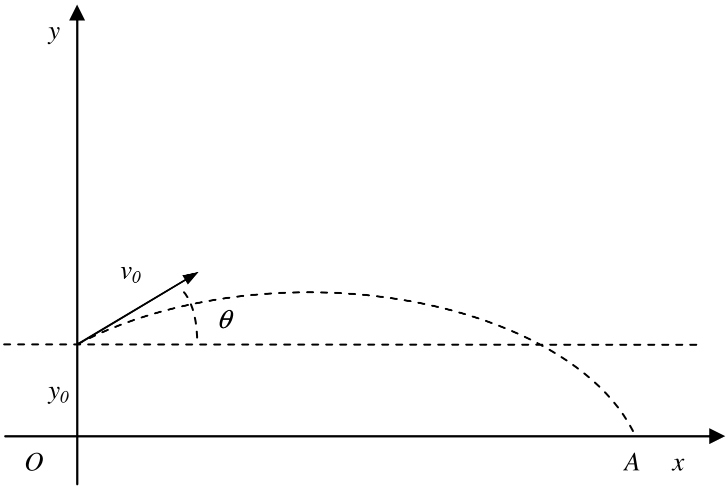
La distanza di cui si deve sollevare la canna del fucile è quindi di circa *4.9 cm* sopra il centro del bersaglio.

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

18) Un pallone di football lanciato su un campo piano percorre una distanza orizzontale di *17 m* prima di toccare terra. Il punto di lancio è a *1.5 m* di altezza e l'angolo di proiezione è di *16°*. Qual è il modulo della velocità iniziale della palla?

Gettys pag.71 n°4.15

Soluzione



OA = 17 m

$y_0 = 1.5\ m$

$\theta = 16°$

$v_0 = ?$

L'equazione che rappresenta la traiettoria seguita dal pallone nella sua caduta è:

$$y = y_0 + x tg\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

dove y_0 è la quota iniziale a cui si trova il pallone, θ è l'angolo di inclinazione iniziale e v_0 è il modulo della velocità iniziale. Il punto *A* di arrivo ha coordinate $x_A = 17\ m$ e $y_A = 0$ per cui diventa:

$$y_A = y_0 + x_A tg\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} {x_A}^2$$

da cui si può ricavare v_0:

$$v_0^2 = \frac{g{x_A}^2}{2\cos^2\theta(y_0 + x_A tg\theta)}$$

e, sostituendo i rispettivi valori

$$v_0^2 = \frac{9.8 \cdot (17)^2}{2\cos^2(16°)(1.5 + 17 \cdot tg16°)} = \frac{2832.2}{1.84 \cdot (6.374)} = 241.46 m^2/s^2$$

si ottiene: $$v_0 = \sqrt{241.46 m^2/s^2} = 15.5 m/s$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

19) La velocità iniziale di una palla di cannone è *200 m/s*. Se è sparata verso un bersaglio che ha una distanza orizzontale di *2 km* dal cannone, trovare:

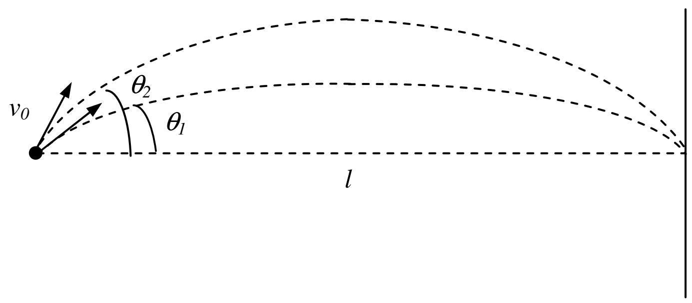
a) i due angoli di tiro per cui il bersaglio verrà colpito;

b) il tempo totale di volo per ciascuna delle due traiettorie trovate in a).

(Si assuma $g = 10\ m/s^2$).

Serway

Soluzione



$l = 2\ km = 2000\ m$

$v_0 = 200\ m/s$

$\theta_1 = ?$

$\theta_2 = ?$

a) Essendo la gittata G pari a:

$$G = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

imponendo in questo caso che essa sia pari proprio alla distanza in orizzontale l dal bersaglio, si ottiene che:

$$\sin 2\theta = \frac{gl}{v_0^2} \cong \frac{10 \cdot 2000}{(200)^2} = 0.5$$

e quindi:

$$2\theta = arcsin\ (0.5)$$

da cui:

$$2\theta_1 = 30°$$

$$2\theta_2 = 180° - 30° = 150°$$

(questo perchè il *sin* assume lo stesso valore sia per θ che per il suo supplementare cioè per $180° - \theta$)

e quindi:

$$\theta_1 = 15°$$

$$\theta_2 = 75°$$

b) Il tempo totale di volo per ognuna delle due traiettorie, individuate dai due diversi angoli iniziali θ_1 e θ_2, si ricava dalla:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

per cui, sostituendo i rispettivi valori, si ha:

$$t_1 = \frac{x}{v_0 \cos\theta_1} = \frac{2000}{200 \cdot \cos 15°} \cong 10.35s$$

$$t_2 = \frac{x}{v_0 \cos\theta_2} = \frac{2000}{200 \cdot \cos 75°} \cong 38.63s$$

<u>**Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica**</u>

20) Un fucile è puntato orizzontalmente al centro di un largo bersaglio distante *150 m*. La velocità iniziale della pallottola è *450 m/s*.

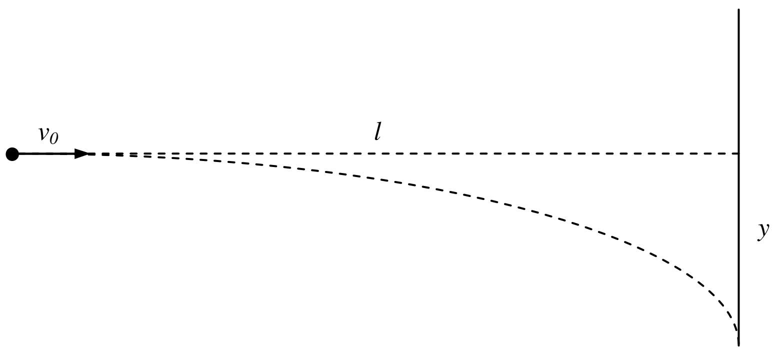
a) Dove la pallottola colpisce il bersaglio?

b) Per colpire il centro del bersaglio, la canna deve essere ad un certo angolo al di sopra della linea di punta. Trovare l'angolo di elevazione della canna.

SERWAY

Soluzione

a) La situazione in questo caso è quella rappresentata in figura: v_0 è la velocità iniziale della pallottola ed il fucile è diretto orizzontalmente quindi l'angolo iniziale è $\theta = 0°$.



$l = 150\ m$

$v_0 = 450\ m/s$

$\theta = 0°$

$y = ?$

Per sapere in quale punto la pallottola colpisce il bersaglio (cioè la distanza y dal centro del bersaglio) si utilizza la formula che individua la traiettoria parabolica del proiettile. Infatti:

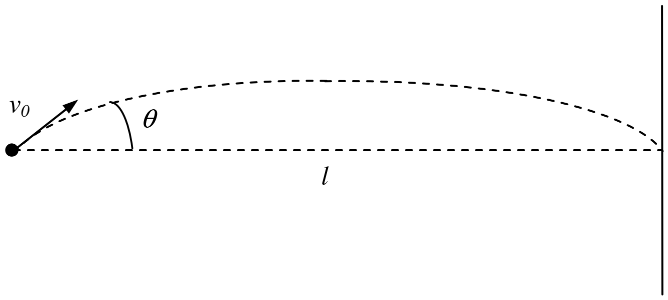
$$y = x tg\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

sostituendo i valori relativi a questa situazione ($x = l = 150$; $v_0 = 450$; $\theta = 0°$) si ottiene:

$$y = 150 \cdot tg 0° - \frac{9.8}{2 \cdot (450)^2 \cos^2 0°} (150)^2 = -0.54 m$$

Quindi il proiettile colpisce il bersaglio circa *54 cm* sotto il centro.

b) In questo caso, pur essendo la velocità iniziale sempre pari a v_0 , l'angolo di inclinazione θ del fucile rispetto all'orizzontale è diverso da zero.



l = *150 m*

v_0 = *450 m/s*

θ = *?*

L'angolo di inclinazione θ deve essere calcolato in modo tale che il proiettile colpisca il centro del bersaglio. Questo significa che la gittata *G* deve essere pari proprio ad *l*, per cui:

$$G = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = l$$

da cui

$$\sin 2\theta = \frac{gl}{v_0^2} = \frac{9.8 \cdot 150}{(450)^2} = 0.007$$

$$2\theta = arcsin\ (0.007) = 0.4°$$

$$\theta \cong 0.2°$$

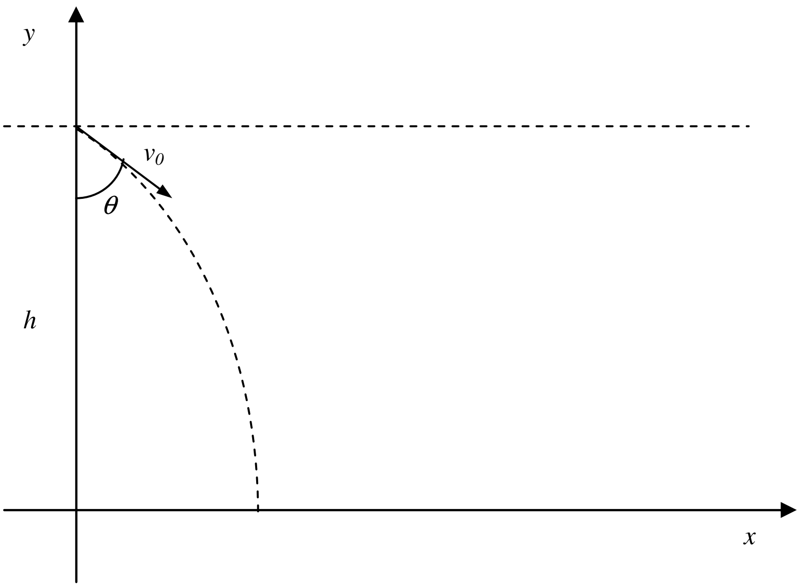
(in linea di principio c'è anche la soluzione $2\theta_2 = 180° - arcsin\ (0.007) = 180° - 0.4° = 179.6°$
e cioè: $\theta_2 = 89.8°$).

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

21) Un bombardiere, in picchiata ad un angolo di *53°* con la verticale, lascia cadere una bomba da un'altezza di *700 m*. La bomba colpisce il suolo *5 s* dopo il lancio.

a) Qual è la velocità del bombardiere?
b) Qual è lo spostamento orizzontale della bomba durante il volo?
c) Quali sono le componenti orizzontali e verticali della velocità della bomba un istante prima di toccare il suolo?

Soluzione



$\theta = 53°$

$h = 700\ m$

$t = 5\ s$

$v_0 = ?$

In questo caso si ha che le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale v_0 sono rispettivamente:

$$v_{0,x} = v_0 \sin\theta$$

$$v_{0,y} = -\ v_0 \cos\theta$$

a) La traiettoria descritta dalla bomba è invece:

$$y = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

e quindi, in questo caso:

$$y = y_0 - v_0 \cos\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

(y_0 rappresenta la quota da cui ha inizio il moto di caduta del grave, mentre il segno - v_0 è dovuto al fatto che la componente verticale della velocità è diretta verso il basso, cioè è concorde con l'accelerazione di gravità)

da cui:

$$v_0 = \frac{1}{\cos\theta \cdot t}\left(y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right) = \frac{1}{\cos 53° \cdot 5}\left(700 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot (5)^2 \right) \cong 192.5 m/s .$$

b) Lo spostamento orizzontale della bomba è dato da:

$$x = v_{0,x}\, t = v_0 \sin\, \theta \cdot t = 192.5 \cdot \sin 53° \cdot 5 = 768\ m.$$

c) La componente orizzontale della velocità è (in tutto il tragitto):

$$v_x = v_0 \sin\, \theta = 192.5 \cdot \sin\, (53°) = 153.7\ m/s$$

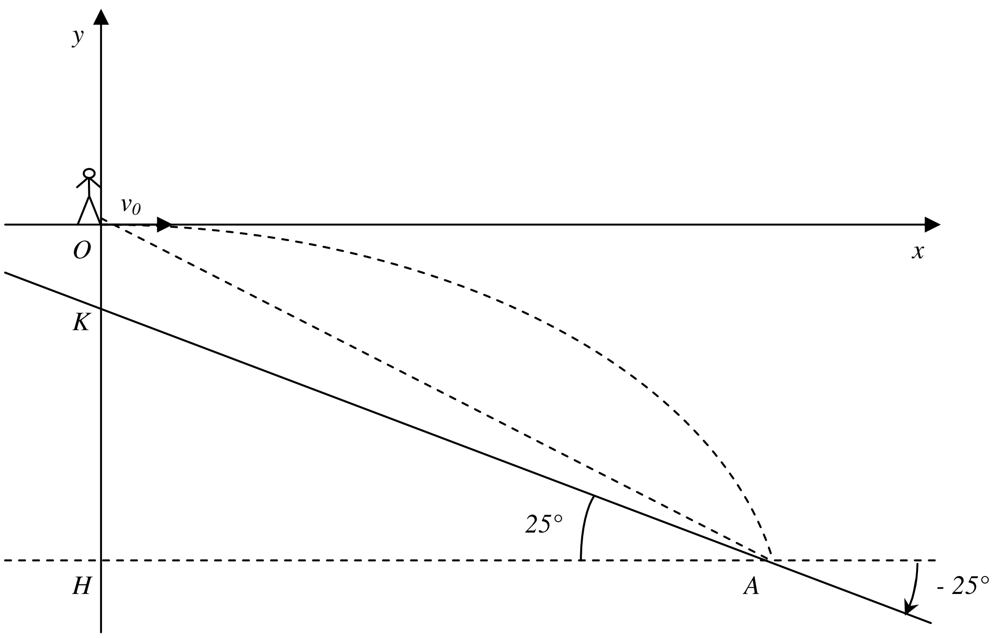
La componente verticale, nel punto di contatto della bomba al suolo, è:

$$v_y = - v_{0,y} - gt = - v_0 \cos\, \theta - gt = - 192.5 \cos 53° - 9.8 \cdot 5 = - 164.8\ m/s.$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica
GETTYS Pag.73 N4.5

22) Una sciatrice salta dal trampolino con una velocità di *34 m/s* lungo l'orizzontale (vedi figura). Il terreno è a una distanza verticale di *4.2 m* al di sotto del punto di lancio ed il pendio forma un angolo di *25°* con l'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria, si determini la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui la saltatrice tocca terra.

Soluzione



$v_0 = 34\ m/s$

$OK = 4.2\ m$

$K\hat{A}H = 25°$

$OA = ?$

Il punto *A* è il punto di intersezione fra la retta che individua il pendio (retta *AK*) e la parabola che rappresenta la traiettoria di caduta della sciatrice.
L'equazione di una retta generica è:

$$y = mx + q$$

dove *m* è il coefficiente angolare e *q* l'intercetta con l'asse y.
La retta *AK* ha coefficiente angolare *m* dato da:

$$m = tg\ (-25°) = -0.466$$

L'intercetta *q* con l'asse delle *y* (cioè l'ordinata con segno del punto *K*) è:

$$q = -4.2$$

Quindi l'equazione della retta che individua il pendio è:

$$y_{pendio} = -0.466\ x - 4.2$$

L’equazione della parabola che rappresenta la traiettoria di caduta è:

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Nel caso specifico, essendo l’angolo iniziale α = *0°* e v_0 = *34 m/s*, l’equazione della traiettoria diventa:

$$y = xtg0° - \frac{9.8}{2(34)^2 \cos^2 0°} x^2 = -0.00424x^2$$

Le ascisse dei punti di intersezione fra la retta (che rappresenta il pendio) e la parabola (che rappresenta la traiettoria di caduta) si ricavano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y_{pendio} = -0.466x - 4.2 \\ y_{parabola} = -0.00424x^2 \end{cases}$$

da cui

$$- 0.466\, x - 4.2 = - 0.00424\, x^2$$

$$0.00424\, x^2 - 0.466\, x - 4.2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (- 0.466)^2 - 4\, (0.00424)(- 4.2) = 0.288$$

$$x_{1,2} = \frac{0.466 \pm \sqrt{0.288}}{2 \cdot 0.00424}$$

Essendo due i punti di intersezione fra retta e parabola, si hanno le due soluzioni:

x_1 = *- 8.33* rappresenta un punto alle spalle della sciatrice (quindi non rappresenta la soluzione cercata);
x_2 = *118 m* che è l’ascissa del punto *A*. La distanza *AH* vale:

$$AH = 118$$

inoltre $HK = AH\, tg\,(25°) = 118 \cdot 0.466 = 55\, m$

quindi $OH = OK + KH = 4.2 + 55 = 59.2\, m$

Conoscendo le misure di *OH* e *AH* si può ricavare (teorema di Pitagora) la misura di *OA*:

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{59.2^2 + 118^2} = 132m$$

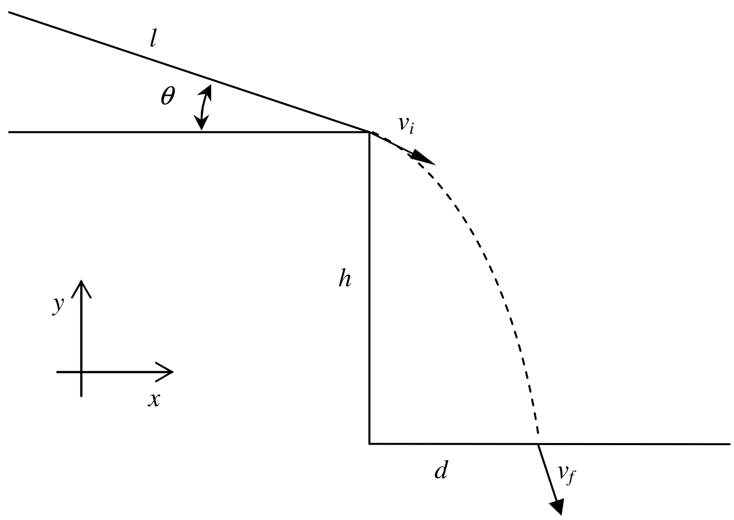
Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

23) Un uomo parte da fermo dalla sommità di un tetto lungo *8 m*, inclinato di *37°* rispetto all'orizzontale, e scende con un'accelerazione di *5 m/s²*. Il bordo del tetto è a *6 m* di altezza dal suolo. Trovare:

a) le componenti della velocità quando raggiunge il suolo;
b) il tempo totale in cui rimane in volo;
c) la distanza d fra la casa ed il punto in cui atterra.

Serway pag 84n°35

Soluzione



$l = 8\ m$

$h = 6\ m$

$\theta = 37°$

$a = 5\ m/s^2$

a) La velocità v_i dell'uomo alla fine del tetto si ricava dalla:

$$v^2 - v_0^{\,2} = 2\,a\,l$$

dove v_0 è la velocità iniziale (nulla) ed l è lo spazio percorso. Sostituendo i valori numerici si ricava:

$$v^2 = 2\,a\,l = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80\ m^2/s^2$$

da cui:

$$v = \sqrt{80} = 8.94 m/s$$

Le componenti della velocità v_i nelle due direzioni x e y, prese con segno, sono quindi:

$$v_{i,x} = v\cos\theta = 8.94\cos 37° \cong 7.14\ m/s$$

$$v_{i,y} = -\,v\sin\theta = -\,8.94\sin 37° \cong -\,5.38\ m/s$$

La velocità alla fine del volo v_f avrà componente lungo l'orizzontale $v_{f,x}$ pari a quella iniziale $v_{i,x}$ ($v_{f,x} = v_{i,x} \cong 7.14\ m/s$) e componente lungo le verticale $v_{f,y}$ data dalla:

$$v_{f,y}{}^2 - v_{i,y}{}^2 = 2\ a\ \Delta y$$

L'accelerazione cui è soggetto l'uomo è quella di gravità a=-g, cioè:

$$v_{f,y}{}^2 - v_{i,y}{}^2 = 2\ a\ (y_f - y_i) = -\ 2\ g\ (0 - h)$$

e quindi

$$v_{f,y}{}^2 = v_{i,y}{}^2 + 2\ g\ h$$

da cui

$$v_{f,y} = -\sqrt{v_{i,y}^2 + 2gh} = -\sqrt{5.38^2 + 2 \cdot 9.8 \cdot 6} = -12 m/s$$

(il segno negativo indica che il vettore velocità è diretto lungo l'asse negativo delle y).

b) Il tempo in cui l'uomo rimane in volo si ricava dalla:

$$v_{f,y} = v_{i,y} + at$$

che in questo caso diventa:

$$v_{f,y} - v_{i,y} = -\ gt$$

da cui

$$t = \frac{v_{f,y} - v_{i,y}}{-g} = \frac{-12 - (-5.38)}{-9.8} = 0.67 s$$

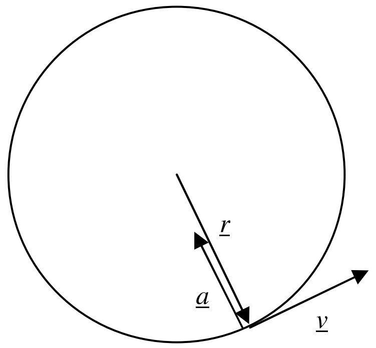
c) La distanza d fra la casa e il punto in cui l'uomo tocca il suolo è data dal prodotto fra la componente orizzontale iniziale della velocità e il tempo di volo, cioè:

$$d = v_{i,x}\, t = 7.14 \cdot 0.67 \cong 4.78\ m$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

24) Un campo magnetico esercita su una particella carica in moto una forza perpendicolare alla direzione del moto. Un elettrone in tale campo è soggetto ad una accelerazione di $3.0 \times 10^{14}\ m/s^2$. Qual è la sua velocità se il raggio della sua traiettoria è $R = 0.15\ m$?

Soluzione



$a = 3.0 \times 10^{14}\ m/s^2$

$R = 0.15\ m$

L'elettrone è soggetto alla forza di Lorentz $\underline{F}_L$ pari a:

$$\underline{F}_L = q\, \underline{v} \wedge \underline{B} = -\, e\, \underline{v} \wedge \underline{B}$$

il cui modulo è:

$$F_L = e\, v\, B$$

Poiché il moto è su una circonferenza di raggio R, l'accelerazione a cui è soggetto l'elettrone è data da:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

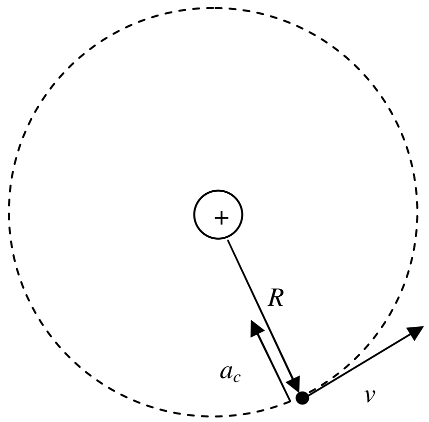
La velocità dell'elettrone sarà quindi:

$$v = \sqrt{a \cdot R} = \sqrt{3 \times 10^{14} \cdot 0.15} = \sqrt{0.45 \times 10^{14}} = 0.67 \times 10^{7} = 6.7 \times 10^{6}\, m/s$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

25) Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno un elettrone ruota intorno a un protone su un'orbita circolare di raggio 5.28×10^{-11} *m* con una velocità di 2.18×10^{6} *m/s*. Qual è l'accelerazione dell'elettrone dell'atomo di idrogeno?

Soluzione



$R = 5.28 \times 10^{-11}\ m$

$v = 2.18 \times 10^{6}\ m/s$

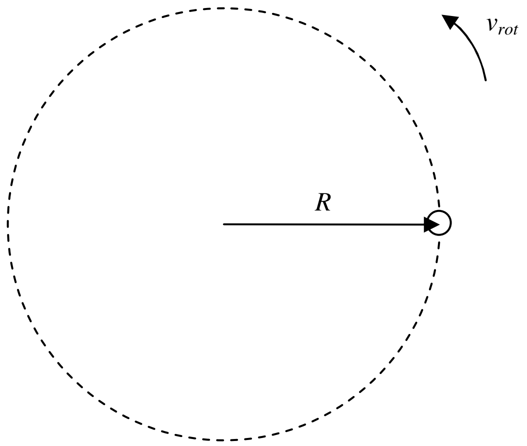
L'accelerazione centripeta a_c cui è soggetto l'elettrone nella sua orbita intorno al protone del nucleo è:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2.18 \times 10^6)^2}{5.28 \times 10^{-11}} = 9 \times 10^{22}\, m/s^2$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

26) Di quale fattore dovrebbe crescere la velocità di rotazione della terra perché per trattenere un corpo sulla terra all'equatore fosse necessaria una accelerazione centripeta uguale a g? In effetti l'accelerazione centripeta necessaria è soltanto $3\ cm/s^2$.

Soluzione



$a_c = 3\ cm/s^2 = 3 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$

L'accelerazione centripeta della Terra è:

$$a_c = \frac{v_{rot}^2}{R} = 3 \cdot 10^{-2} m/s^2$$

allora a'_c sarà:

$$a'_c = \frac{v'^2_{rot}}{R} = \frac{(k \cdot v_{rot})^2}{R} = \frac{k^2 \cdot v_{rot}^2}{R} = k^2 \cdot a_c$$

(dove k è il fattore cercato).

Dovendo essere

$$a'_c = g$$

allora

$$k^2 \cdot a_c = g \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{g}{a_c}$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{a_c}} = \sqrt{\frac{9.8 m/s^2}{3 \cdot 10^{-2} m/s^2}} \cong 18$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

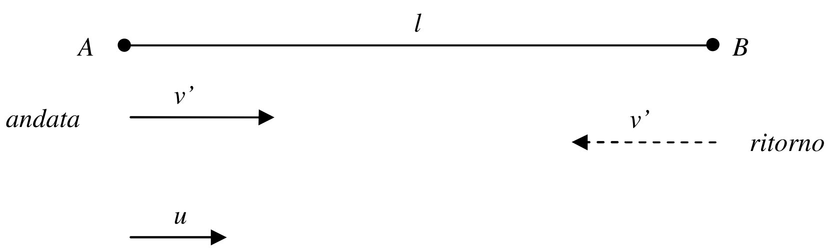
27) Un pilota vola da A a B verso est e torna indietro ad A. Egli tiene una velocità costante v' rispetto all'aria, mentre la velocità dell'aria rispetto al suolo è u e la distanza tra A e B è l. Dimostrare che:

a) Se $u = 0$ (aria tranquilla), il tempo per fare questo giro è: $t_0 = \frac{2l}{v'}$

b) Se l'aria si muove verso est (oppure ovest), il tempo per il volo diventa: $t_E = \frac{t_0}{\left[1 - \left(\frac{u}{v'}\right)^2\right]}$

c) Se l'aria si muove verso nord (o sud) il tempo per il volo è: $t_N = \frac{t_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{u}{v'}\right)^2\right]}}$

Soluzione



v' = velocità dell'aereo

u = velocità aria

a) In questo caso $u = 0$ quindi

$$v_{AB} = v_{BA} = v'$$

$$t_{AB} = \frac{l}{v'} \qquad \text{e} \qquad t_{BA} = \frac{l}{v'}$$

Il tempo totale di volo (andata e ritorno) è quindi:

$$t_0 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{v'} + \frac{l}{v'} = \frac{2l}{v'}$$

b) In questo caso si deve tener conto anche della velocità dell'aria u, che (supponendo sia diretta da $A \rightarrow B$) dà un contributo positivo nella direzione $A \rightarrow B$ e un contributo negativo nella direzione $B \rightarrow A$, quindi si ha:

$A \rightarrow B$ (andata) $\qquad v = v' + u \qquad t_{AB} = \dfrac{l}{v'+u}$

$B \rightarrow A$ (ritorno) $\qquad v = v' - u \qquad t_{BA} = \dfrac{l}{v'-u}$

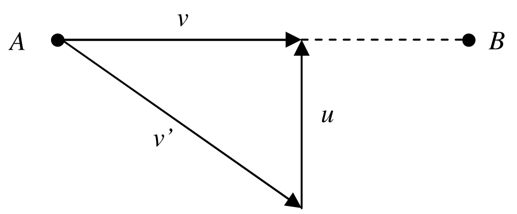
Quindi:

$$t_E = t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{v'+u} + \frac{l}{v'-u} = l\,\frac{v'-u+v'+u}{(v'+u)(v'-u)} = 2l\,\frac{v'}{v'^2-u^2} =$$

$$= \frac{2l}{v'} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{v'^2}} = \frac{t_0}{1-\left(\dfrac{u}{v'}\right)^2}$$

(lo stesso sarebbe se u fosse diretta da $B \rightarrow A$).

c) Supponendo che u sia diretta da Sud a Nord, ed essendo v' la velocità dell'aereo rispetto all'aria, allora la velocità risultante v sarà la somma delle due componenti:



$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{u}$

Applicando il teorema di Pitagora (considerando quindi solo i moduli), si ha:

$$v'^2 = v^2 + u^2$$

e anche:

$$v^2 = v'^2 - u^2$$

quindi

$$v = \sqrt{v'^2 - u^2} = v'\sqrt{1-\frac{u^2}{v'^2}}$$

da cui:

$$t_N = t_{AB} + t_{BA} = 2\,t_{AB} =$$

$$= 2\frac{l}{v'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{v'^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{v'^2}}}$$

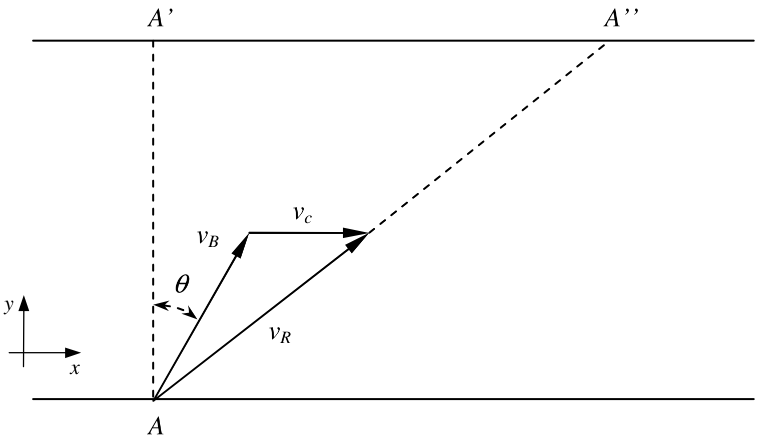
<u>**Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica**</u>

28) Un uomo desidera attraversare un fiume largo *500 m*. Egli rema con velocità (relativa all'acqua) di *3 km/h*, mentre la velocità della corrente è *1.2 km/h*. Se l'uomo può camminare sulla riva a *5 km/h*:

a) trovare il percorso che deve compiere (in barca e a piedi) per raggiungere il punto opposto a quello di partenza nel minore tempo possibile;

b) Quanto tempo ci impiega?

Soluzione



$AA' = 500\ m$

$v_B = 3\ km/h$

$v_c = 1.2\ km/h$

$v_p = 5\ km/h$

Il vettore $\underline{v}_R$ della velocità risultante della barca è dato dalla somma vettoriale della velocità della barca $\underline{v}_B$ più la velocità della corrente $\underline{v}_c$, cioè:

$$\underline{v}_R = \underline{v}_B + \underline{v}_c$$

Scomponendo nelle due direzioni (orizzontale *x* e verticale *y*) otteniamo:

$$v_{R,x} = v_B\ sen\ \theta + v_c \qquad (1)$$

$$v_{R,y} = v_B\ cos\ \theta \qquad (2)$$

Il tempo necessario per raggiungere il punto *A'* a partire dal punto *A* è la somma di due termini, il tempo necessario per attraversare il fiume in barca (tratto *AA"*) ed il tempo per andare da *A"* ad *A'* a piedi, cioè:

$$t_{AA'} = t_{AA''} + t_{A''A'}$$

Mentre la barca si muove da *A* ad *A"* lungo la retta *AA"* con velocità v_R, essa si sposta verticalmente di un tratto $d=AA'$ con velocità pari a $v_{R,y}$. Nello stesso tempo $t_{AA''}$ si sposta orizzontalmente di un tratto uguale ad *A'A"*. Quindi si ha:

$$AA' = v_{R,y}\, t_{AA''}$$

$$A'A'' = v_{R,x}\, t_{AA''}$$

Essendo $AA' = d$ e $v_{R,y} = v_B \cos\theta$, dalla prima delle equazioni di sopra, si ha che:

$$t_{AA''} = \frac{AA'}{v_{R,y}} = \frac{d}{v_B \cos\theta}$$

Sostituendo questa nella seconda delle precedenti e tenendo conto della (1), si ottiene la lunghezza del tratto *A'A"*:

$$A'A'' = v_{R,x} \cdot t_{AA''} = (v_B sen\theta + v_c)\frac{d}{v_B \cos\theta} = tg\theta \cdot d + \frac{v_c}{v_B \cos\theta} d$$

Il tempo impiegato per compiere a piedi il tratto *A"A'* sarà quindi:

$$t_{A''A'} = \frac{A'A''}{v_p} = tg\theta \cdot \frac{d}{v_p} + \frac{v_c}{v_B \cos\theta} \cdot \frac{d}{v_p}$$

e quindi il tempo totale per raggiungere il punto *A'* sarà:

$$t_{AA'} = t_{AA''} + t_{A''A'} = \frac{d}{v_B \cos\theta} + tg\theta \cdot \frac{d}{v_p} + \frac{v_c}{v_B \cos\theta} \cdot \frac{d}{v_p} =$$

$$= tg\theta \cdot \frac{d}{v_p} + \left(\frac{d}{v_B} + \frac{v_c}{v_B} \cdot \frac{d}{v_p}\right)\frac{1}{\cos\theta} =$$

$$= tg\theta \cdot \frac{0.5}{5} + \left(\frac{0.5}{3} + \frac{1.2}{3} \cdot \frac{0.5}{5}\right)\frac{1}{\cos\theta} = 0.1 \cdot tg\theta + 0.206 \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

Ne è risultato che il tempo è una funzione dell'angolo θ e precisamente:

$$t_{AA'} = f(\theta) = 0.206 \cdot \frac{1}{\cos\theta} + 0.1 \cdot tg\theta$$

Il valore minimo del tempo per percorrere il tratto $A \rightarrow A'' \rightarrow A'$ si ricava annullando la derivata prima della funzione $f(\theta)$ e cioè:

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0.206 \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + 0.1 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{0.206 \cdot \sin\theta + 0.1}{\cos^2\theta} = 0$$

da cui, annullando il numeratore, si ha:

$$\sin\theta = -\frac{0.1}{0.206} = -0.485$$

e quindi $\theta = arcsin(-0.485) = -29°$

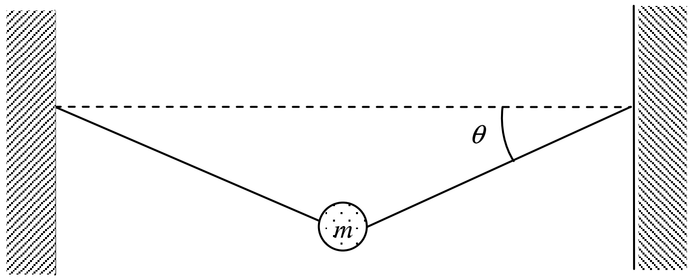
Sostituendo questo valore di θ nella funzione *f(θ)* che da' il tempo impiegato a raggiungere il punto opposto in funzione dell'angolo θ, si ottiene:

$$t_{AA'} = f(-29°) = 0.206 \cdot \frac{1}{\cos(-29°)} + 0.1 \cdot tg(-29°) = 0.235 - 0.0554 \cong 0.18h \cong 11\min$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

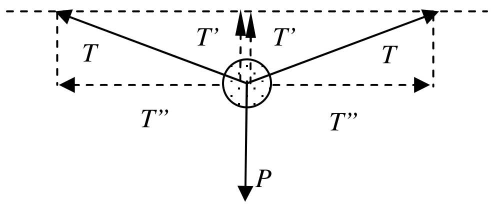
Gettys pag 97 n° 5.39

29) Un uccello di massa $m = 26\ g$ si posa nel mezzo di una corda tesa. Si dimostri che la tensione della corda è data da $T = mg/(2\ sin\theta)$. Si determini la tensione quando:
b) $\theta = 5°$
c) $\theta = 0.5°$.
Si ammetta che le due metà della corda siano rettilinee.



Soluzione

Le forze che agiscono sul corpo sono le tensioni dei due fili T, e il peso P del corpo



Scomponendo le tensioni dei fili lungo le due direzioni orizzontale x e verticale y si ottiene:

$$T' = T \sin\theta$$
$$T'' = T \cos\theta$$

Le componenti orizzontali delle tensioni si annullano. Le componenti verticali bilanciano la forza peso.

$$T' + T' - P = 0$$

$$2T' = P$$

$$2T \sin\theta = P$$

da cui

$$T = \frac{mg}{2\sin\theta}$$

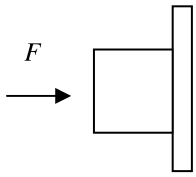
che per i diversi angoli θ assume i seguenti valori:

b) $$T(\theta = 5°) = \frac{0.026 \cdot 9.8}{2\sin 5°} = 1.46N$$

c) $$T(\theta = 0.5°) = \frac{0.026 \cdot 9.8}{2\sin 0.5°} \cong 14.6N$$

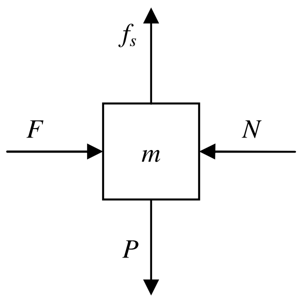
Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

30) Con riferimento alla figura, qual è l'intensità minima della forza che, applicata al blocco, gli impedirà di scivolare giù lungo la parete verticale? La massa del blocco è $m = 6.4\ kg$ ed il coefficiente di attrito statico fra il blocco e la parete vale $\mu_s = 0.76$.



Soluzione

Le forze che agiscono sul corpo, nelle due direzioni, orizzontale e verticale, sono le seguenti:



lungo l'asse x agiscono la forza F e la reazione vincolare N. La 2ª legge di Newton lungo x sarà:

$$F - N = 0$$

lungo l'asse y agiscono la forza peso P e la forza d'attrito f_s. La 2ª legge di Newton lungo y sarà:

$$P - f_s = 0$$

da cui:

$$F = N \qquad (1)$$

e

$$P = f_s \qquad (2)$$

Si vuole determinare il valore minimo F_{min} di F che impedirà al blocco di scivolare. Per valori di $F < F_{min}$ il corpo scivolerà, il che significa che anche la massima forza d'attrito non è sufficiente a bilanciare il peso.

Per $F = F_{min}$ il peso mg è invece bilanciato dalla massima forza d'attrito.

Per $F > F_{min}$ la $f_{s,max} = \mu_s F > mg$, il che significa che a bilanciare il peso mg sarà una forza di attrito f_s inferiore al massimo valore possibile $f_{s,max}$. In queste condizioni potrebbe essere sostenuto un corpo di massa maggiore.

Quindi essendo $\qquad f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s F_{min}$

e $\qquad P = mg$

la (2) diventa: $\qquad mg = \mu_s F_{min}$

da cui:

$$F_{\min} = \frac{mg}{\mu_s}$$

che, per la (1), significa:

$$F_{\min} = \frac{mg}{\mu_s} = \frac{6.4 \cdot 9.8}{0.76} = 82.5N$$

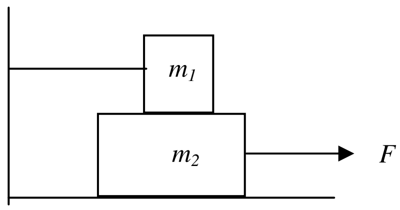
<u>Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica</u>

Serway-Beichner (Fisica per Scienze e Ingegneria) pag. 154 N 68

31) Un blocco di massa $m_1 = 5\ kg$ è posto su di un blocco di massa $m_2 = 10\ kg$ (vedi figura). Una forza orizzontale $F = 45\ N$ è applicata al blocco di massa m_2, mentre il blocco m_1 è legato alla parete. Il coefficiente di attrito dinamico fra le superfici in movimento è $\mu_d = 0.2$.

a) disegnare un diagramma di corpo libero per ciascun blocco;

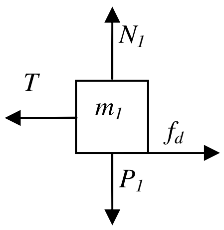
b) determinare la tensione nel filo e l'accelerazione del blocco m_2.



Soluzione

a) I diagrammi di corpo libero per ciascuno dei due corpi sono i seguenti:

- corpo 1



T è la tensione del filo

f_d è la forza di attrito dinamico presente fra i due corpi

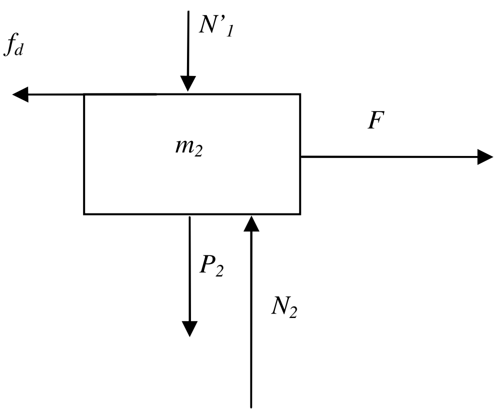
N_1 è la forza normale che il corpo 2 esercita sul corpo 1

P_1 è il peso del corpo 1

Le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

lungo x $\quad f_d - T = 0 \qquad (1)$

lungo y $\quad N_1 - P_1 = 0 \qquad (2)$



- corpo 2

F è la forza esterna applicata al blocco 2

f_d è la forza di attrito dinamico presente fra i due corpi

$N_1' = N_1$ è la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2 (N_1 ed N_1' sono coppie di azione e reazione)

N_2 è la forza che il piano d'appoggio esercita sul corpo 2

P_2 è il peso del corpo 2

Le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

$$\text{lungo } x \qquad F - f_d = m_2\, a \qquad (3)$$
$$\text{lungo } y \qquad N_2 - P_2 - N'_1 = 0 \qquad (4)$$

(dalla (4) si ottiene che: $N_2 = P_2 + N'_1 = P_2 + N_1 = P_2 + P_1$ cioè la reazione vincolare del piano d'appoggio è pari proprio al peso dei due corpi, come ci si doveva aspettare).

b) Dalla (1) si ha che:

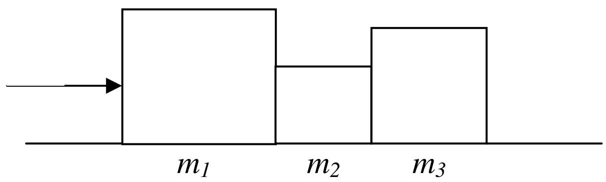
$$T = f_d = \mu_d\, N_1 = \mu_d\, m_1\, g = 0.2 \cdot 5 \cdot 9.8 = 9.8\ N$$

Dalla (3) si ha che l'accelerazione del corpo 2 è:

$$a_2 = \frac{F - f_a}{m_2} = \frac{F - \mu_d m_1 g}{m_2} = \frac{45 - 0.2 \cdot 5 \cdot 9.8}{10} = 3.52\, m/s^2$$

32) La figura mostra tre casse di massa $m_1 = 45.2\ kg$, $m_2 = 22.8\ kg$ e $m_3 = 34.3\ kg$ poste su una superficie orizzontale priva di attrito.

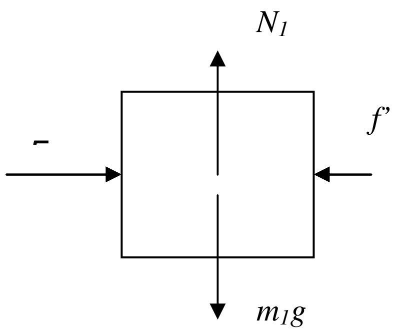
a) Tracciare i diagrammi di corpo libero per ciascuna delle tre masse.
b) Quale forza orizzontale è necessaria per spingere le tre casse insieme verso destra con una accelerazione di $1.32\ m/s^2$?
c) Determinare le forze di contatto f' esercitata da m_1 su m_2 ed f'' esercitata da m_2 su m_3.



Soluzione

a) I diagrammi di corpo libero per ciascuna massa sono i seguenti:

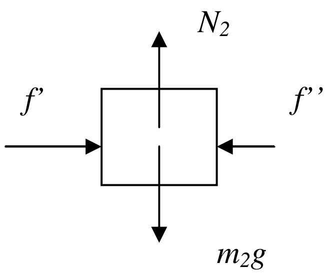
- Massa m_1



$N_1 = m_1\, g$

$F - f' = m_1\, a$

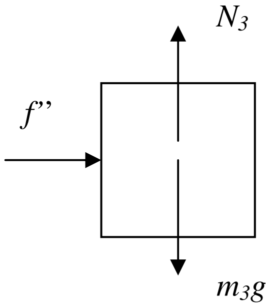
- Massa m_2



$N_2 = m_2\, g$

$f' - f'' = m_2\, a \qquad (1)$

- Massa m_3



$N_3 = m_3\, g$

$f'' = m_3\, a$ (2)

b) Le tre casse di massa m_1, m_2 ed m_3 equivalgono ad un unico corpo di massa totale:

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

per cui la forza orizzontale necessaria per spostare le casse verso destra è pari a :

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)\ a = (45.2 + 22.8 + 34.3)\cdot 1.32 = 102.3\cdot 1.32 \cong 135.0\ N$$

c) Dalla (2) si ricava che il valore della forza f'' esercitata da m_2 su m_3 è pari a:

$$f'' = m_3\ a = 34.3\cdot 1.32 = 45.28\ N \cong 45.3\ N$$

Dalla (1) si ricava invece il valore della forza f' esercitata da m_1 su m_2:

(1) $f' - f'' = m_2\ a$

da cui: $f' = f'' + m_2\ a = 45.28 + 22.8\cdot 1.32 \cong 75.4\ N$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica
SERWAY

33) Una forza orizzontale F è applicata ad una puleggia priva di attrito di massa m_2 come in figura. La superficie orizzontale è liscia.

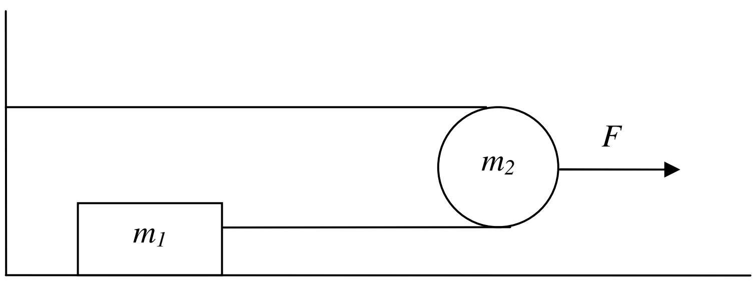
a) Mostrare che l'accelerazione del blocco di massa m_1 è il doppio dell'accelerazione della puleggia.

Trovare:

b) l'accelerazione della puleggia e del blocco;

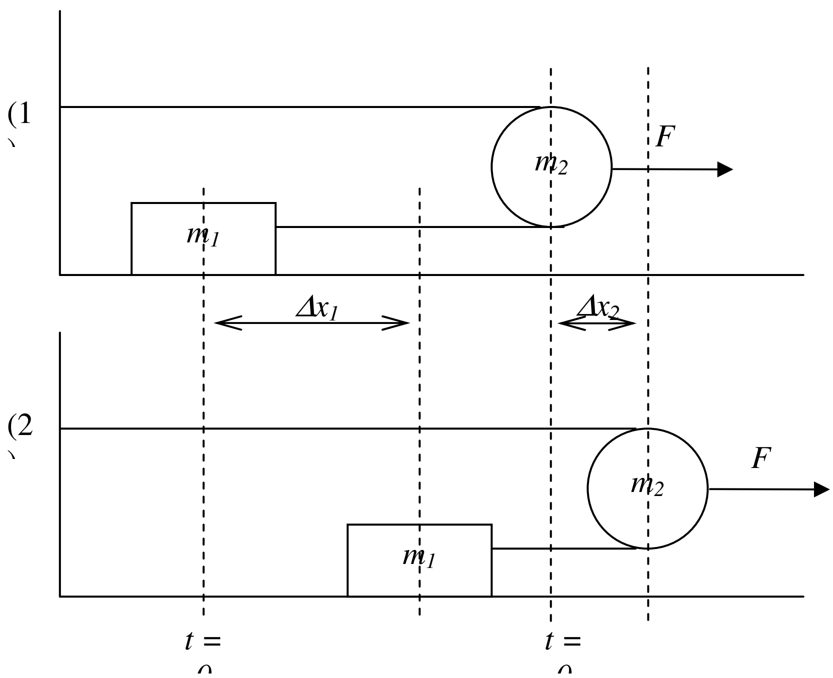
c) la tensione del filo.

Una forza di supporto costante è applicata al perno della puleggia eguale al suo peso.



Soluzione

a) Se la puleggia all'istante iniziale $t = 0$ si trova nella posizione (1) in figura e nell'istante successivo si è spostata verso destra di una quantità Δx_2, allora il corpo m_1 si deve essere spostato verso destra di una quantità $\Delta x_1 = 2\ \Delta x_2$ come mostrato in figura (2).



Essendo la velocità v_2 della puleggia pari a:

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{t}$$

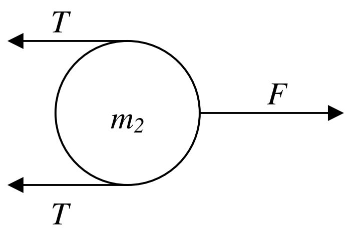
quella v_1 del corpo risulta essere:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{t} = \frac{2\Delta x_2}{t} = 2v_2$$

e quindi l'accelerazione del corpo risulta:

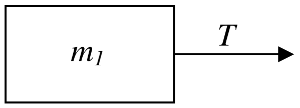
$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{t} = \frac{2\Delta v_2}{t} = 2a_2$$

b) Le forze orizzontali che agiscono sulla puleggia e sul corpo sono le seguenti:



l'equazione del moto della puleggia risulta:

$F - 2T = m_2\, a_2$ (3)



l'equazione del moto del corpo risulta:

$T = m_1\, a_1$ (4)

Per quanto dimostrato precedentemente si ha che:

$$a_1 = 2\, a_2$$

e quindi la (4) diventa:

$$T = m_1\, a_1 = 2\, m_1\, a_2$$

Sostituendo nella (3) si ha:

$$F - 4\, m_1\, a_2 = m_2\, a_2$$

da cui:

$$F = (4\, m_1 + m_2)\, a_2$$

e quindi, essendo in questo caso $F = P = m_2\, g$, si ricava:

$$a_2 = \frac{F}{4m_1 + m_2} = \frac{m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

e

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

c) Dalla (4) si ricava:

$$T = m_1 a_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

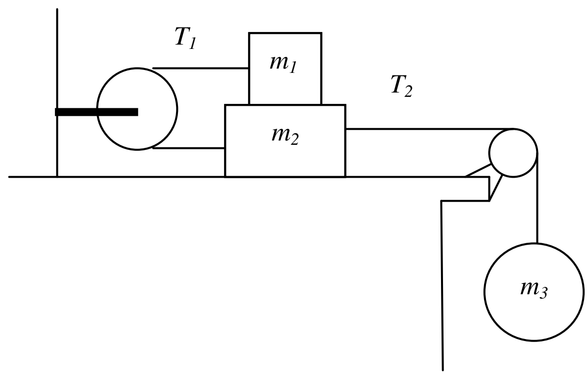
34) In figura, il coefficiente di attrito dinamico fra i blocchi $m_1 = 2\ kg$ ed $m_2 = 5\ kg$ è $\mu_d = 0.3$. La massa sospesa è $m_3 = 10\ kg$. La superficie orizzontale e le pulegge sono prive di attrito.

a) Determinare i diagrammi di corpo libero per ciascun blocco.

b) Determinare l'accelerazione di ciascun corpo.

c) Trovare la tensione nei fili.

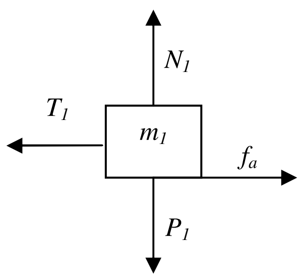
SERWAY



Soluzione

a) I diagrammi di corpo libero per ciascuno dei corpi sono i seguenti:

- corpo 1

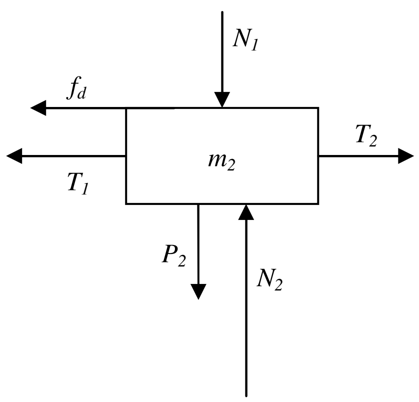


le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

lungo x $\quad T_1 - f_d = m_1\ a$

lungo y $\quad N_1 - P_1 = 0$

- corpo 2

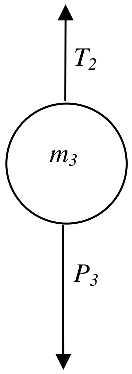


le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

lungo x $\quad T_2 - T_1 - f_d = m_2\ a_2$

lungo y $\quad N_2 - N_1 - P_2 = 0$

- corpo 3



le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

lungo y $\quad P_3 - T_2 = m_3\, a$

b) Poiché il filo è in estensibile, le accelerazioni dei tre corpi sono uguali. Le equazioni precedenti si possono riscrivere nel modo seguente:

$T_1 - f_d = m_1\, a$

$T_2 - T_1 - f_d = m_2\, a$

$P_3 - T_2 = m_3\, a$

La forza di attrito dinamico f_d è pari a:

$$f_d = \mu_d N = \mu_d m_1\, g$$

e il peso P_3 è pari a:

$$P_3 = m_3\, g$$

per cui, sostituendo nelle tre equazioni precedenti e sommando membro a membro, si ottiene:

$$T_1 - \mu_d m_1\, g + T_2 - T_1 - \mu_d m_1\, g - T_2 + m_3\, g = (m_1 + m_2 + m_3)\, a$$

cioè

$$m_3\, g - 2\, \mu_d m_1\, g = (m_1 + m_2 + m_3)\, a$$

da cui

$$a = \frac{m_3 g - 2\mu_d m_1 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{10 \cdot 9.8 - 2 \cdot 0.3 \cdot 2 \cdot 9.8}{2 + 3 + 10} \cong 5.75 m/s^2$$

c) La tensione dei due fili si ricava sostituendo i valori numerici nelle equazioni del moto:

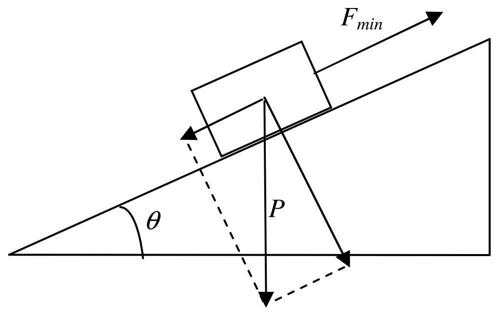
$$T_1 = f_d + m_1\, a = \mu_d m_1\, g + m_1\, a = m_1\, (\mu_d\, g + a) = 2\, (0.3 \cdot 9.8 + 5.75) = 17.38\ N$$

$$T_2 = P_3 - m_3\, a = m_3\, g - m_3\, a = 10 \cdot 9.8 - 10 \cdot 5.75 = 40.5\ N$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

35) Un blocco di massa $m = 8\ kg$ è fermo su un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono rispettivamente uguali a $\mu_s = 0.25$ e $\mu_d = 0.15$.
a) Quanto vale la minima forza F parallela al piano inclinato che impedisce al blocco di scivolare verso il basso?
b) Qual è la minima forza F che mette in moto il blocco in salita?
c) Qual è la forza necessaria a mantenere il blocco in moto con velocità costante in salita?

Soluzione



$m = 8\ kg$

$\theta = 30°$

$\mu_s = 0.25$

$\mu_d = 0.15$

La forza che spinge il corpo verso il basso è la componente, parallela al piano inclinato, della forza peso P, cioè:

$$P_{//} = P\ sin\theta\ = m\ g\ sin\theta = 8\ \cdot 9.8 \cdot sin\ 30° = 39.2\ N$$

La massima forza d'attrito statico che si può sviluppare è pari a:

$$f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s P\ cos\theta = \mu_s m\ g\ cos\theta = 0.25\ \cdot 8\ \cdot 9.8\ cos\ 30° = 16.97\ N$$

La massima forza d'attrito dinamico che si può sviluppare è pari a:

$$f_{d,max} = \mu_d N = \mu_d P\ cos\theta = \mu_d m\ g\ cos\theta = 0.15\ \cdot 8\ \cdot 9.8\ cos\ 30° = 10.18\ N$$

a) Se il blocco tendesse a scivolare verso il basso, la forza di attrito tenderebbe ad opporsi al moto e sarebbe quindi diretta verso l'alto. La minima forza parallela al piano inclinato che si deve applicare perché il corpo non scivoli verso il basso è una forza che, insieme alla forza di attrito statico, deve bilanciare la componente parallela della forza peso. Si deve avere:

$$P_{//} - f_{s,max} - F_{min} = 0$$

e cioè:

$$F_{min} = P_{//} - f_{s,max} = 39.2 - 16.97 = 22.2\ N$$

b) Se il blocco tendesse a muoversi verso l'alto, la forza di attrito statico tenderebbe ad opporsi al moto e sarebbe quindi diretta verso il basso. La forza minima che mette in moto il corpo in salita deve bilanciare la componente parallela del peso aumentata della forza di attrito statico. Quindi:

$$F_{min} - P_{//} - f_{s,max} = 0$$

da cui

$$F_{min} = P_{//} + f_{s,max} = 39.2 + 16.97 = 56.17\ N$$

c) La forza necessaria a mantenere il corpo in moto in salita con velocità costante è quella che bilancia la componente parallela della forza peso e la forza di attrito dinamico (diretta verso il basso poiché in moto è verso l'alto):

$$F'_{min} - P_{//} - f_{d,max} = 0$$

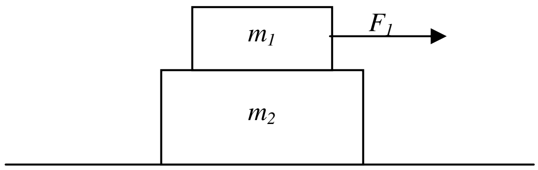
e cioè:

$$F'_{min} = P_{//} + f_{d,max} = 39.2 + 10.18 = 49.38\ N$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

36) Un blocco di massa m_1 = *4.4 kg* è posto sopra un altro di massa m_2 = *5.5 kg*. Affinché il blocco piccolo possa scivolare su quello grande tenuto fermo, bisogna applicare sul primo una forza di F_1 = *12 N*. I due blocchi sono posti su un tavolo orizzontale privo d'attrito. Si determini:

a) il coefficiente di attrito statico tra i due blocchi.
b) la massima accelerazione del blocco 1;
c) la massima forza orizzontale applicabile al blocco in basso per mettere in moto insieme i due blocchi;



Soluzione

Se serve una forza $F_1 = 12\ N$ per far scivolare il blocco m_1 sul blocco m_2 tenuto fermo, significa che la massima forza di attrito che si può sviluppare al contatto fra m_1 ed m_2 è pari a:

$$f_{s,max} = F_1 = 12\ N$$

ma la forza di attrito statico è

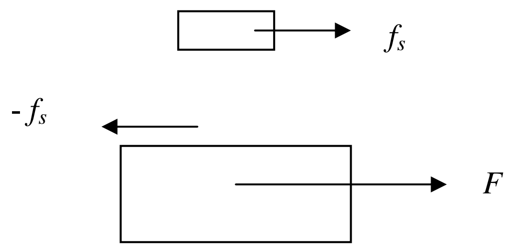
$$f_{s,max} = \mu_s m_1 g$$

Il coefficiente di attrito statico si ricava dalla:

$$\mu_s = \frac{f_{s,\max}}{m_1 g} = \frac{12}{4.4 \cdot 9.8} \cong 0.28$$

L'equazione del moto del corpo 1 lungo l'asse orizzontale è la (1). L'equazione del moto del corpo 2 lungo l'asse orizzontale è la (2), da cui si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} f_s = m_1 a & (1) \\ F - f_s = m_2 a & (2) \end{cases}$$



La massima accelerazione del corpo 1 si ha in corrispondenza della massima forza di attrito $f_{s,max}$ sviluppabile fra le superfici a contatto e cioè:

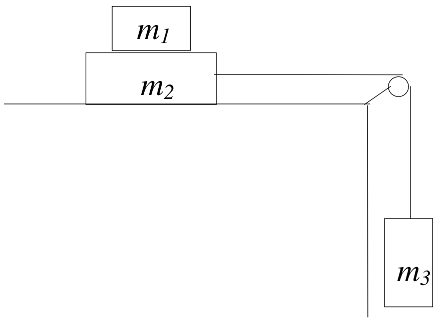
$$a_{\max} = \frac{f_{s,\max}}{m_1} = \frac{12}{4.4} = 2.73\ m/s^2$$

La massima forza F, applicabile al corpo 2 per mettere in moto <u>insieme</u> i due corpi è quella che genera la massima accelerazione a_{max} del blocco 1:

$$F_{\max} = (m_1 + m_2) a_{\max} = (m_1 + m_2)\frac{f_{s,\max}}{m_1} = (4.4 + 5.5) \cdot \frac{12}{4.4} = 27 N$$

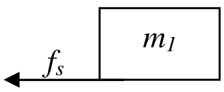
Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

37) Nella figura la massa $m_2 = 10\ kg$ striscia su una superficie orizzontale liscia. I coefficienti di attrito statico e di attrito dinamico fra la massa m_2 e la massa $m_1 = 5\ kg$ sono $\mu_s = 0.6$ e $\mu_d = 0.4$.
a) Qual è l'accelerazione massima di m_1?
b) Qual è il valore massimo di m_3 se m_1 si muove insieme a m_2 senza strisciare?
c) Se $m_3 = 30\ kg$ si trovi l'accelerazione di ciascuna massa e la tensione del filo.



Soluzione

a) L'accelerazione massima del corpo 1 si ricava dall'equazione del moto lungo l'asse orizzontale e cioè:



$$f_s = m_1 a_1 \qquad (1)$$

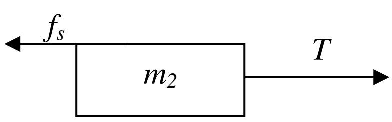
da cui

$$a_{1,\max} = \frac{f_{s,\max}}{m_1} = \frac{\mu_s m_1 g}{m_1} = \mu_s g = 0.6 \cdot 9.8 = 5.88 m/s^2$$

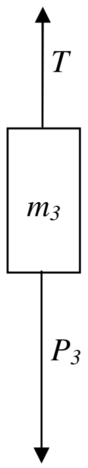
b) Se il corpo 1 si muove insieme al corpo 2 senza strisciare, significa che i due corpi hanno la stessa accelerazione a, che è la stessa del corpo 3, cioè:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

I diagrammi di corpo libero di 2 e di 3 e le equazioni del moto sono i seguenti



$$T - f_s = m_2\, a \qquad (2)$$



$P_3 - T = m_3\, a$ (3)

Mettendo a sistema le tre equazioni del moto (1), (2) e (3) si ottiene:

$$\begin{cases} f_s = m_1 a \\ T - f_s = m_2 a \\ P_3 - T = m_3 a \end{cases}$$

sommando membro a membro si ha:

$$P_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\, a$$

e cioè:

$$m_3\, g = (m_1 + m_2 + m_3)\, a$$

essendo, dalla (1):

$$a = \frac{f_s}{m_1} = \frac{\mu_s m_1 g}{m_1} = \mu_s g$$

sostituendo, si ottiene:

$$m_3\, g = (m_1 + m_2 + m_3)\, \mu_s\, g$$

da cui

$$m_3\, (1 - \mu_s) = (m_1 + m_2)\, \mu_s$$

e quindi

$$m_{3,\max} = (m_1 + m_2)\frac{\mu_s}{1-\mu_s} = (5+10)\frac{0.6}{1-0.6} = 22{,}5 Kg$$

b) Essendo $m_3 = 30\ kg$, per quanto visto al punto b), risulta $m_3 > m_{3,max}$ allora significa che la massa m_1 striscia sulla massa m_2 . Quindi sulla massa 1 agisce una forza di attrito dinamico f_d pari a:

$$f_d = \mu_d\, m_1 g$$

Dalla (1) si ricava che:

$$\mu_d\, m_1 g = m_1 a_1$$

e quindi l'accelerazione a_1 cui è soggetto il corpo 1 è:

$$a_1 = \mu_d\, g = 0.4 \cdot 9.8 = 3.92\ m/s^2$$

Dalle (2) e (3), essendo $f_{d1} = f_{d2}$ si ha che:

$$\begin{cases} T - f_{d2} = m_2 a \\ P_3 - T = m_3 a \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} T - \mu_d m_1 g = m_2 a \\ P_3 - T = m_3 a \end{cases}$$

sommando membro a membro si ottiene:

$$P_3 - \mu_d\, m_1 g = (m_2 + m_3)\, a$$

cioè

$$m_3 g - \mu_d\, m_1 g = (m_2 + m_3)\, a$$

da cui:

$$a = \frac{m_3 - \mu_d m_1}{m_3 + m_2}\, g = \frac{30 - 0.4 \cdot 5}{30 + 10} 9.8 = 6.86 m/s^2$$

(accelerazione dei corpi 2 e 3).

Dalla (3) si ricava il valore della tensione del filo:

$$T = P_3 - m_3\, a = m_3\, g - m_3\, a = m_3\, (g - a) = 30\, (9.8 - 6.86) = 88.2\ N$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

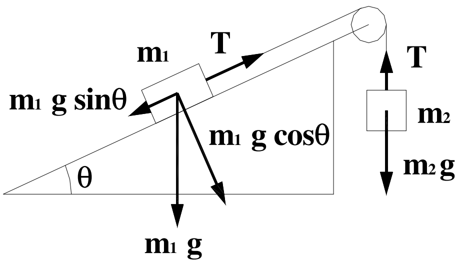
38) Un blocco di massa $m_1 = 3.3\ kg$ sta su un piano privo di attrito inclinato di un angolo $\theta = 28°$ rispetto all'orizzontale. Esso è collegato ad un blocco di massa $m_2 = 1.86\ kg$ tramite una fune (inestensibile e di massa trascurabile) appoggiata ad una carrucola priva di attrito. Si determini:

a) l'accelerazione di ogni blocco;
b) la tensione della fune;
c) la velocità acquistata da m_2 dopo aver percorso un tratto verticale di $0.5\ m$.

Soluzione

a) Tracciando i diagrammi di corpo libero, e supponendo che il corpo m_1 si muova verso il basso, si ricava il seguente sistema di equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} m_1 \cdot g \cdot sin\theta - T = m_1 \cdot a \\ T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \end{cases}$$



sommando membro a membro, si ottiene:

$$m_1 \cdot g \cdot sin\theta - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

dalla quale si ricava l'accelerazione a con cui si muovono i blocchi:

$$a = \frac{m_1 \cdot g \cdot sin\theta - m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{3.3 \cdot sin28° - 1.86}{(3.3 + 1.86)} \times 9.8 = \frac{1.55 - 1.86}{5.16} \times 9.8 = -\frac{0.31}{5.16} \times 9.8 \cong -0.59 \ \text{m/s}^2$$

il segno meno nell'equazione precedente sta ad indicare che il verso dell'accelerazione è opposto a quello ipotizzato, pertanto il corpo m_1 sale lungo il piano inclinato, mentre il corpo m_2 scende.
Peraltro, è possibile verificare immediatamente questa condizione, in quanto il valore numerico della forza che tira m_2 verso il basso, pari a $m_2 \cdot g \cong 18.2\ N$, è maggiore di quello della forza che tira m_1 verso il basso lungo il piano inclinato, pari a $m_1 \cdot g \cdot sin\theta = 15.2\ N$.

b) La tensione nella fune si ricava dalla seguente formula:

$$T = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a = 1.86 \times (9.8 - 0.59) \cong 17.1 \ \ \text{N}$$

c) Se il corpo m_2 scende con accelerazione pari, in modulo, a $0.59\ m/s^2$ e percorre uno spazio $d = 0.5\ m$ partendo da fermo, è possibile ricavare la velocità finale dalla relazione cinematica seguente:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot (y - y_0)$$

ponendo:

$v_0 = 0$
$a = 0.59\ m/s^2$
$(y - y_0) = d = 0.5\ m$

risulta pertanto:

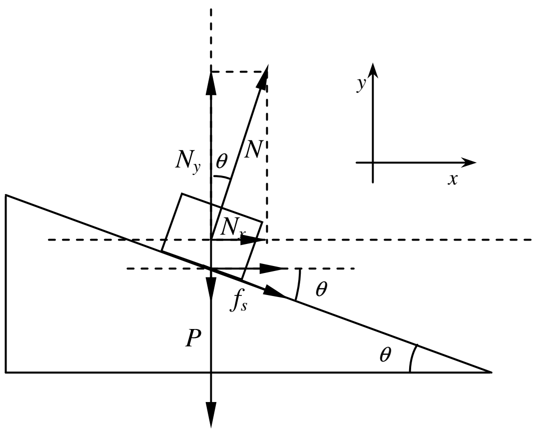
$$v^2 = 2 \cdot 0.59 \cdot 0.5 = 0.59\ m^2/s^2 \quad \Rightarrow \quad v \cong 0.77\ m/s$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

39) Un blocco è fermo su un cuneo posto su un piano orizzontale Sia $\theta = 10°$ l'angolo di inclinazione della superficie del cuneo e $\mu_s = 0.5$ il coefficiente di attrito statico fra blocco e cuneo. Si calcoli il massimo valore dell'accelerazione che può essere impressa al cuneo senza che il blocco si sposti.

Soluzione

Per grandi valori dell'accelerazione a del cuneo, il blocco tende a spostarsi verso l'alto, quindi la forza di attrito statico f_s sarà diretta verso il basso.



Scegliendo come assi di riferimento x e y quelli disegnati in figura, le forze che agiscono sul blocco si possono scomporre nelle due direzioni nel modo seguente:

lungo x $\quad N_x + f_{s,x} = m\,a$

lungo y $\quad N_y - f_{s,y} - m\,g = 0$

da cui

$$\begin{cases} N\sin\theta + f_s\cos\theta = ma \\ N\cos\theta - f_s\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda delle due equazioni, essendo $f_s = \mu_s N$, si ha che:

$$N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta = m\,g$$

e quindi

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$$

Sostituendo nella prima si ottiene il valore dell'accelerazione:

$$N\,sin\theta + \mu_s\,N\,cos\theta = m\,a$$

$$N\,(sin\theta + \mu_s\,cos\theta) = m\,a$$

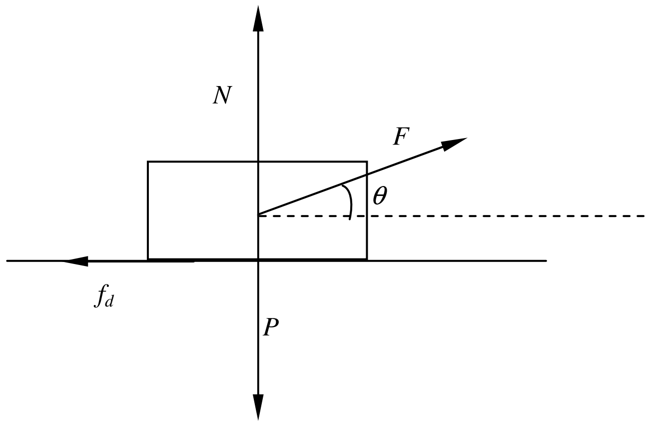
e quindi

$$a = \frac{\sin\theta + \mu_s \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}\,g$$

<u>**Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica**</u>

40) Un uomo tira una slitta di massa $m = 20\ kg$ su una superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra la slitta e la superficie è di 0.15 e la forza F con cui l'uomo trascina la slitta è inclinata di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Determinare la forza necessaria a mantenere la slitta in moto con velocità costante.

Soluzione



m = 20 kg

$\mu_d = 0.15$

$\theta = 30°$

$F = ?$

Le equazioni del moto, nelle due direzioni, orizzontale e verticale sono:

lungo x $\quad F_x - f_d = 0$

lungo y $\quad N + F_y - P = 0$

Le componenti F_x ed F_y della forza F sono date da:

$$F_x = F\cos\theta$$
$$F_y = F\sin\theta$$

Inoltre

$$f_d = \mu_d N$$

$$\mathbf{P = mg}$$

Sostituendo si ha:

$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu_d N = 0 \\ N + F\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu_d N = 0 \\ N = mg - F\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu_d (mg - F\sin\theta) = 0 \\ N = mg - F\sin\theta \end{cases}$$

dalla prima:

$$F\,cos\theta + \mu_d F\,sin\theta = \mu_d\,mg$$

si ricava il valore di F:

$$F = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta} = \frac{0.15\cdot 20\cdot 9.8}{\cos 30° + 0.15\cdot \sin 30°} = 31.2N$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

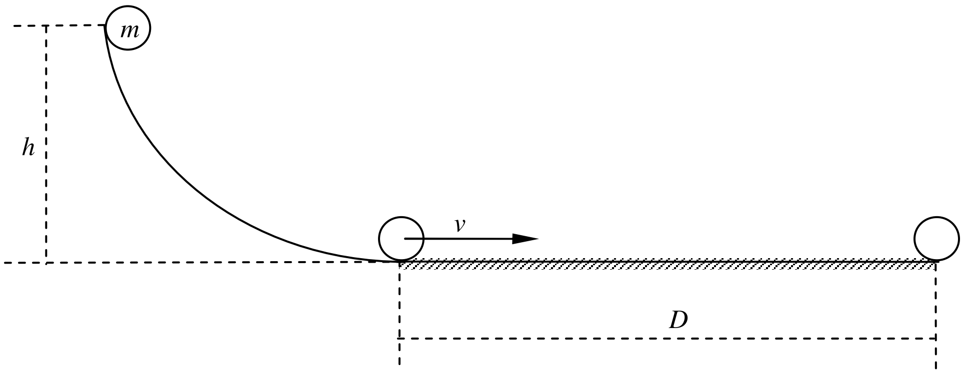
41) Un corpo di massa $m = 2\ kg$ scende lungo una rampa priva di attrito che si raccorda dolcemente con una superficie piana orizzontale scabra. Il corpo parte da fermo da una quota $h = 4.5\ m$ rispetto alla superficie. Raggiunta la superficie orizzontale percorre strisciando un tratto di lunghezza $D = 10\ m$ prima di arrestarsi.

a) Determinare la velocità del corpo al termine della rampa.

b) Determinare il lavoro compiuto dalla forza d'attrito.

c) Calcolare il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il corpo e la superficie scabra, supponendo costante la forza di attrito.

Soluzione



$m = 2\ kg$

$h = 4.5\ m$

$D = 10\ m$

a) $v = ?$

b) $L_{attr} = ?$

c) $\mu_d = ?$

a) Lungo la rampa priva di attrito si ha la conservazione dell'energia meccanica, quindi:

$$E_{c,in} + U_{in} = E_{c,fin} + U_{fin}$$

cioè:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

da cui si ricava la velocità v del corpo alla fine della rampa:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 4.5} = 9.39 m/s$$

b) Nella parte piana scabra non si ha conservazione dell'energia meccanica; l'energia dissipata è pari al lavoro compiuto dalla forza d'attrito. Per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$L_{attr} = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left(v_f^{\ 2} - v^2\right) = \frac{1}{2}m\left(0 - v^2\right) = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}2 \cdot (9.39)^2 = -88.2J$$

c) Dal lavoro della forza d'attrito (considerata costante) si può ricavare il valore del coefficiente di attrito μ_d:

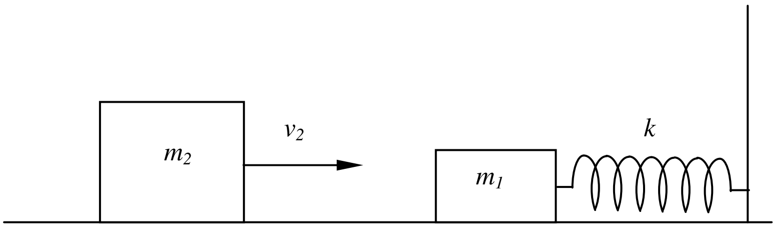
$$L_{attr} = -\ \mu_d\ m\ g\ D$$

da cui

$$\mu_d = \frac{L_{attr}}{-mgD} = \frac{-88.2}{-2 \cdot 9.8 \cdot 10} \cong 0.45$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

42) Un blocco di massa $m_1 = 1\ kg$ fermo su una superficie orizzontale priva di attrito è attaccato ad una molla allo stato di riposo, avente $k = 220\ N/m$, fissata all'altra estremità come indicato in figura. Un blocco di massa $m_2 = 2\ kg$, con velocità $v_{2,i} = 4\ m/s$, urta il blocco m_1 fermo. Se i due blocchi rimangono attaccati insieme dopo una collisione unidimensionale qual è la massima compressione A della molla che si verifica quando si ha l'arresto momentaneo dei blocchi?



Soluzione

Si tratta di un urto completamente anelastico, la velocità v dei due corpi, dopo l'urto, si ricava dalla conservazione della quantità di moto:

$$p_{TOT,in} = p_{TOT,fin}$$

$$p_{TOT,in} = p_{1,in} + p_{2,in} \qquad\qquad p_{TOT,fin} = (m_1 + m_2)\, v$$

$$m_1\, v_{1,i} + m_2\, v_{2,i} = (m_1 + m_2)\, v$$

ma, essendo la velocità iniziale $v_{1,i}$ del corpo 1 nulla, si ha:

$$0 + m_2\, v_{2,i} = (m_1 + m_2)\, v$$

da cui:

$$v = \frac{m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 4}{1+2} \cong 2.7 m/s$$

Dato che la superficie su cui avviene il moto è liscia, immediatamente dopo l'urto si ha conservazione dell'energia meccanica. Un istante dopo l'urto l'energia meccanica del sistema m_1 + m_2 è solo cinetica. All'istante di massima compressione l'energia meccanica è solo potenziale elastica, quindi:

$$E_{cin} = E_{molla}$$

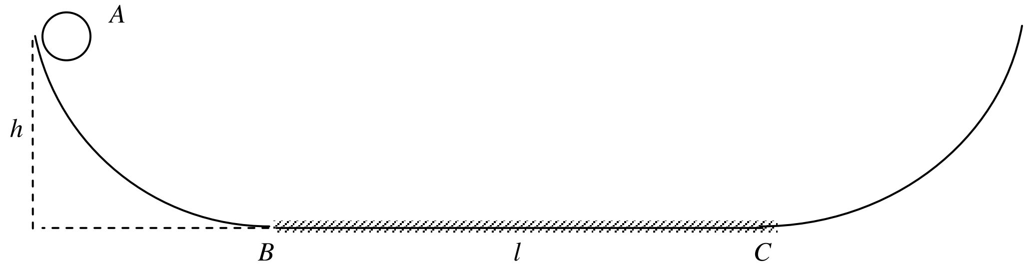
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

da cui

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)v^2}{k}} = \sqrt{\frac{(1+2)(2.7)^2}{220}} \cong 0.31m$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

43) Una particella scivola lungo un profilo con i lati rialzati e una parte centrale piatta. La parte piatta è lunga $l = 2\ m$ e le parti curve sono senza attrito. Il coefficiente di attrito dinamico della parte piatta è $\mu_d = 0.2$. Se la particella è lasciata libera nel punto A da un'altezza $h = 1m$ al di sopra della parte piatta del profilo, dove si fermerà?



Soluzione

Tutta l'energia meccanica posseduta nel punto A viene dissipata in calore dalla forza di attrito, presente nel tratto orizzontale, fino a quando il corpo non si ferma.
L'energia meccanica in A è tutta energia potenziale $U = mgh$. Con questa energia iniziale la particella sarebbe in grado (se non ci fosse il profilo rialzato di destra) di percorrere un tratto orizzontale di lunghezza d tale che:

$$U_A = L_{attr}$$

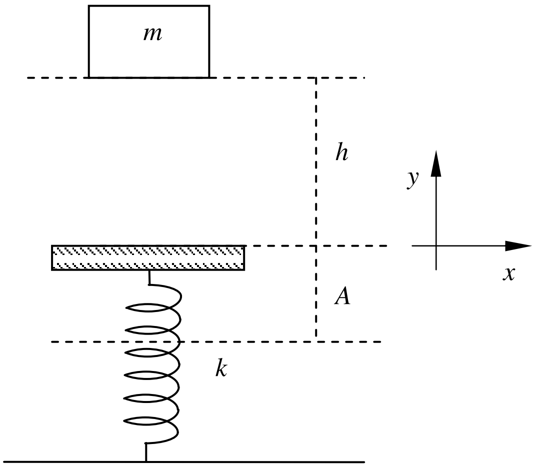
$$m\,g\,h = \mu_d\,m\,g\,d$$

$$d = \frac{h}{\mu_d} = \frac{1}{0.2} = 5m$$

La lunghezza del tratto scabro necessario per dissipare l'intera energia meccanica dovrebbe essere pari a $5\ m$. In questo caso $l < 5\ m$; ciò significa che la particella prosegue il suo moto sulla rampa liscia a destra (dove non si ha dissipazione di energia) fino al punto più alto, raggiunto il quale la velocità cambia verso e la particella scende nuovamente verso il tratto orizzontale scabro. La particella percorre nuovamente il tratto orizzontale lungo $2\ m$ e risale sul profilo curvo liscio di sinistra, arriva nel punto più alto dove la velocità cambia nuovamente verso e scende verso il basso ripercorrendo il tratto orizzontale scabro per la lunghezza di $1\ m$. A questo punto esaurita tutta la sua energia, la particella si ferma.

1° passaggio:	$B \rightarrow C$	$d_1 = 2\ m$		
2° passaggio:	$C \rightarrow B$	$d_2 = 2\ m$		
3° passaggio:	$B \rightarrow X$	$d_3 = 1\ m$	$\rightarrow$	Il punto X si trova quindi a metà tratto orizzontale.
totale		$d = 5\ m$		

44) Un blocco di massa $m = 2\ kg$ viene lasciato cadere da un'altezza di *40 cm* su una molla di costante elastica $k = 18\ N/cm$. Si determini la massima compressione della molla.



$k = 18\ N/cm = 1800 N/m$

$h = 40\ cm = 0.4\ m$

Soluzione

Per la legge di conservazione dell'energia meccanica (assumendo il riferimento di figura) l'energia meccanica iniziale E_{in} deve essere uguale all'energia meccanica finale E_{fin}. L'energia meccanica iniziale è solo energia potenziale gravitazionale della massa m a quota h nel sistema di riferimento di figura. L'energia meccanica finale è energia potenziale gravitazionale di m a quota $y = -A$ ed energia potenziale elastica della molla compressa di A rispetto alla sua lunghezza a riposo.

$$m g h = - m g A + ½ k A^2$$

quindi:

$$\frac{1}{2}kA^2 - mgA - mgh = 0$$

(equazione di secondo grado in A)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (- mg)^2 - 4\ (½\ k)(- mg)$$

$$A_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 4\frac{1}{2}kmgh}}{2 \cdot \frac{1}{2}k} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 2kmgh}}{k}$$

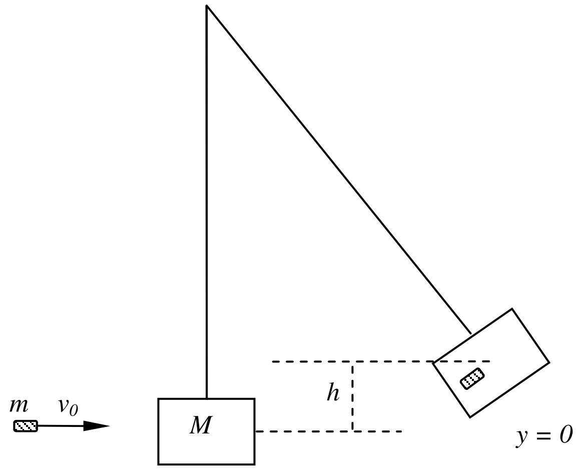
$$A_1 = \frac{2 \cdot 9.8 - \sqrt{2^2 9.8^2 + 2 \cdot 1800 \cdot 2 \cdot 9.8 \cdot 0.4}}{1800} = -0.083m$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 9.8 + \sqrt{2^2 9.8^2 + 2 \cdot 1800 \cdot 2 \cdot 9.8 \cdot 0.4}}{1800} = 0.105m$$

La massima compressione A della molla è quindi di *10.5 cm*.

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

45) Un proiettile di massa m e velocità incognita v_0 urta anelasticamente con un blocco di legno di massa M inizialmente fermo e resta attaccato ad esso. Il sistema blocco + proiettile si solleva di un'altezza h come mostrato in figura. Ricavare un'espressione per v_0.
(pendolo balistico)



Soluzione

Dalla legge di conservazione della quantità di moto si può ricavare il valore della velocità V del sistema blocco + proiettile immediatamente dopo l'urto.

$$p_{TOT,in} = m\,v_0 + M\,V_0 = m\,v_0 + M\,0 = m\,v_0$$

$$p_{TOT,fin} = (m + M)\,V$$

$$p_{TOT,in} = p_{TOT,fin}$$

$$m\,v_0 = (m + M)\,V$$

da cui:

$$V = \frac{m}{m+M} v_0$$

Applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica al sistema blocco + proiettile fra l'istante immediatamente dopo l'urto e l'istante in cui il sistema $m + M$ raggiunge la quota h si ha:

$$\tfrac{1}{2}(m + M)\,V^2 = (m + M)\,g\,h$$

semplificando

$$\tfrac{1}{2}V^2 = g\,h$$

Sostituendo il valore di V ricavato prima, si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{(m+M)^2} v_0^2 = gh$$

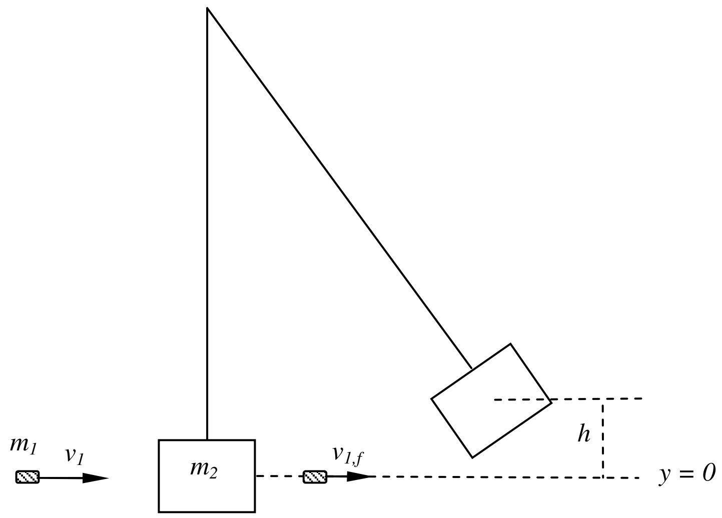
e quindi

$$v_0 = \sqrt{2gh\frac{(m+M)^2}{m^2}} = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

Da una misura di h è possibile ricavare il valore della velocità incognita del problema.

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

46) Un proiettile di massa m_1 è sparato con velocità incognita v_1 nel blocco di un pendolo balistico di massa m_2. Si trovi l'altezza massima raggiunta dal blocco m_2 se il proiettile attraversa il blocco e ne esce con velocità $v_{1,f} = ¼\, v_1$.



Soluzione

In questo caso l'urto non è completamente anelastico poiché il proiettile fuoriesce dal blocco. Vale comunque la legge di conservazione della quantità di moto:

$$p_{1,i} + p_{2,i} = p_{1,f} + p_{2,f}$$

ma $p_{2,i} = m_2\, v_{2,i} = 0$ quindi

$$m_1\, v_1 = m_1\, v_{1,f} + m_2\, v_{2,f}$$

Essendo $v_{1,f} = ¼\, v_1$ si ha

$$m_1\, v_1 = ¼\, m_1\, v_1 + m_2\, v_{2,f}$$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) m_1 v_1 = m_2 v_{2,f}$$

da cui:

$$v_{2,f} = \frac{3}{4} \cdot \frac{m_1}{m_2} v_1$$

Per ricavare l'altezza massima raggiunta dal blocco dopo l'urto, si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica fra l'istante immediatamente successivo all'urto e l'istante in cui il blocco raggiunge l'altezza massima h:

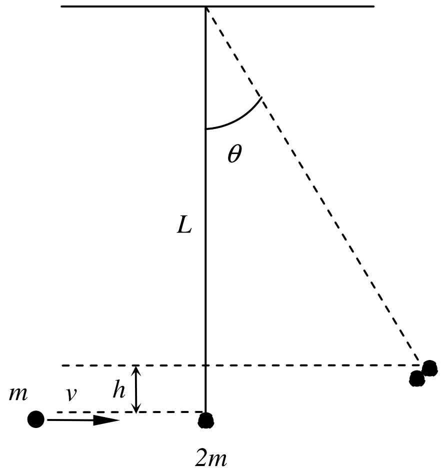
$$\frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 = m_2 g h$$

$$h = \frac{1}{2g} v_{2,f}^2 = \frac{1}{2g} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{m_1}{m_2} v_1 \right)^2 .$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

47) Una sfera di massa *2m* è appesa a un filo inestensibile di lunghezza $L = 1.2\ m$ e massa trascurabile. Quando si trova ferma nel punto di equilibrio la sfera è colpita da una sfera più piccola di massa *m* in moto con velocità orizzontale *v*.
Sapendo che l'urto è completamente anelastico e che il sistema dopo l'urto oscilla con un'ampiezza angolare $\theta = 10°$, determinare il modulo della velocità iniziale *v* della sfera più piccola.

Soluzione



$L = 1.2\ m$

$\theta = 10°$

Per le proprietà trigonometriche:

$h = L - L\cos\theta = L\,(1 - \cos\theta)$

$v = ?$

Si è in presenza di un urto (completamente anelastico), quindi si ha la conservazione della quantità di moto. Detta *V* la velocità con cui si muovono i due corpi dopo l'urto, quando restano attaccati, si ha:

$$p_{in} = p_{fin}$$

$$m\,v = (m + 2m)\,V$$

che diventa:

$$m\,v = 3m\,V$$

quindi la velocità *v* iniziale della massa *m* sarà pari a:

$$v = 3V \qquad (1)$$

Fra l'istante immediatamente dopo l'urto e l'istante in cui il sistema $m + 2m$ raggiunge la quota *h* si ha la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}(m+2m)V^2 = (m+2m)gh$$

cioè:

$$\frac{1}{2}3mV^2 = 3mgL(1-\cos\theta)$$

sostituendo il valore di *V* ricavato dalla (1) si ha:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v}{3}\right)^2 = gL(1-\cos\theta)$$

da cui

$$v = \sqrt{18gL(1-\cos\theta)} = \sqrt{18\cdot 9.8\cdot 1.2(1-\cos 10°)} \cong 1.79 m/s$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

48) Una particella di massa $m_1 = 1\ g$ si muove con velocità $v_1 = 100\ m/s$ in una data direzione, quando viene raggiunta da una seconda particella di massa $m_2 = 2\ g$ che procede lungo la stessa direzione e nello stesso verso con velocità $v_2 = 200\ m/s$. Dopo l'urto le due particelle rimangono saldate l'una all'altra. Calcolare l'energia dissipata nell'urto.

Soluzione

$m_1 = 1\ g = 0.001\ kg$

$m_2 = 2\ g = 0.002\ kg$

$v_1 = 100\ m/s$

$v_2 = 200\ m/s$

L'urto è completamente anelastico, poiché le due particelle rimangono attaccate dopo l'urto. Si ha quindi conservazione della quantità di moto, ma non conservazione dell'energia cinetica.
Dalla conservazione della quantità di moto, si ricava la velocità v delle particelle dopo l'urto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.001 \cdot 100 + 0.002 \cdot 200}{0.001 + 0.002} = 166 m/s$$

La differenza fra l'energia cinetica prima dell'urto E_c e quella dopo dell'urto E'_c è proprio l'energia dissipata E_{diss}:

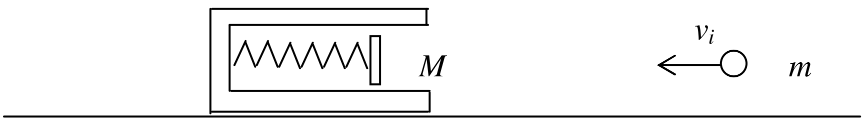
$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 0.001 \cdot (100)^2 + \frac{1}{2} 0.002 \cdot (200)^2 = 45 J$$

$$E'_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2}(0.001 + 0.002) \cdot (166)^2 = 41.3 J$$

$$E_{diss} = E_c - E'_c = 45 - 41.3 = 3.7\ J$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

49) Una palla di massa m è lanciata con velocità v_i in una canna di un fucile a molla di massa M inizialmente in quiete su una superficie orizzontale liscia. La massa m si incastra nella canna nel punto di massima compressione della molla. Supponendo che non si dissipi energia in attrito, calcolare la frazione di energia cinetica iniziale della palla che resta immagazzinata nella molla.



Soluzione

Dalla conservazione della quantità di moto si ricava la velocità V con cui si muovono le due masse dopo l'urto:

$$m\, v_i = (m + M)\, V$$

$$V = \frac{m}{m+M} v_i$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2{}_i = \tfrac{1}{2}\,(m + M)\, V^2 + E_{molla}$$

da cui

$$E_{molla} = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v_i^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M} v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \frac{m}{m+M} = \frac{1}{2} m v_i^2 \left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = E_c \frac{M}{m+M}$$

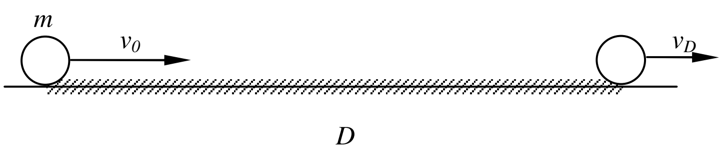
La frazione di energia cinetica che resta immagazzinata nella molla è quindi:

$$\frac{E_{molla}}{E_c} = \frac{E_c \dfrac{M}{m+M}}{E_c} = \frac{M}{m+M}$$

50) Un corpo di massa $m = 0.5\ kg$ è lanciato con velocità $v_0 = 2\ m/s$ su un piano orizzontale scabro. Nell'istante in cui esso ha percorso un tratto $D = 30\ cm$ la sua velocità è $v_0/2$. Supponendo che la forza d'attrito sia costante, determinare:

a) il coefficiente di attrito fra il corpo e il piano;
b) il tempo impiegato per percorrere il tratto OD.

Soluzione



$m = 0.5\ kg$

$v_0 = 2\ m/s$

$D = 30\ cm = 0.3\ m$

$v_D = v_0/2 = 1\ m/s$

a) Essendo il piano scabro, si ha dissipazione di energia a causa della presenza della forza d'attrito. La variazione di energia cinetica ΔE_c è pari al lavoro fatto dalla forza di attrito:

$$\Delta E_c = L_{attr}$$

supponendo la forza d'attrito costante $L_{attr} = -\mu_d N D = -\mu_d m g D$, quindi

$$\frac{1}{2} m \cdot (v_D^2 - v_0^2) = -\mu_d m g D$$

$$\mu_d = \frac{v_D^2 - v_0^2}{-2gD} = \frac{1^2 - 2^2}{-2 \cdot 9.8 \cdot 0.3} = 0.51$$

b) Il valore dell'accelerazione a cui è sottoposto il corpo si ricava dalla 2° legge di Newton:

$$F_{attr} = m\, a$$

$$-\mu_d m\, g = m\, a$$

da cui:

$$a = -\mu_d g = -0.51 \cdot 9.8 \cong -5\ m/s^2$$

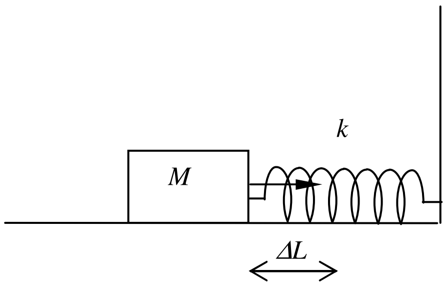
Il tempo impiegato per percorrere il tratto OD quindi è:

$$t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_D - v_0}{a} = \frac{1-2}{-5} = 0.2 s$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

51) Un blocco di massa $M = 1\ kg$ colpisce un'estremità di una molla disposta orizzontalmente la cui altra estremità è fissa. La costante elastica della molla è $k = 20\ N/m$ e la massa della molla è trascurabile. Il blocco comprime la molla di un tratto $\Delta L = 50\ cm$.
Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e la superficie orizzontale è $\mu_d = 0.25$, determinare la velocità del blocco nell'istante in cui inizia a comprimere la molla.

Soluzione



$M = 1\ kg$

$k = 20\ N/m$

$\Delta L = 50\ cm = 0.5\ m$

$\mu_d = 0.25$

$v = ?$

Un istante prima di colpire l'estremità della molla, l'energia meccanica totale della massa M è solo energia cinetica $E_{tot,\ in} = E_c = ½\ M\ v^2$. Durante la compressione della molla l'energia della massa M è sia cinetica che potenziale, mentre parte dell'energia meccanica viene dissipata in calore a causa della presenza della forza di attrito. Nel punto di massima compressione della molla, l'energia meccanica totale è solo energia potenziale elastica $E_{tot,\ fin} = U = ½\ k\ \Delta L^2$.
L'energia potenziale finale è inferiore all'energia cinetica iniziale perché durante la compressione agisce la forza d'attrito. La variazione dell'energia meccanica è pari al lavoro fatto dalla forza non conservativa Durante lo strisciamento infatti si genera calore e si osserva un aumento della temperatura delle superfici a contatto:

$$E_{tot,\ fin} - E_{tot,\ in} = L_{attr}$$

$$E_{tot,\ in} = E_{tot,\ fin} - L_{attr}$$

$$L_{attr} = -\mu_d M g \Delta L$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} k \Delta L^2 - (-\mu_d M g \Delta L) = \frac{1}{2} k \Delta L^2 + \mu_d M g \Delta L$$

da cui si ricava

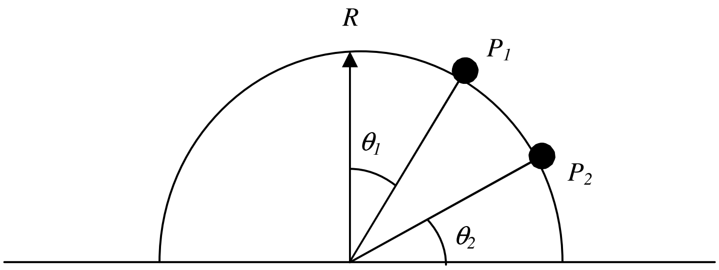
$$v^2 = \frac{k}{M} \Delta L^2 + 2\mu_d g \Delta L$$

e quindi

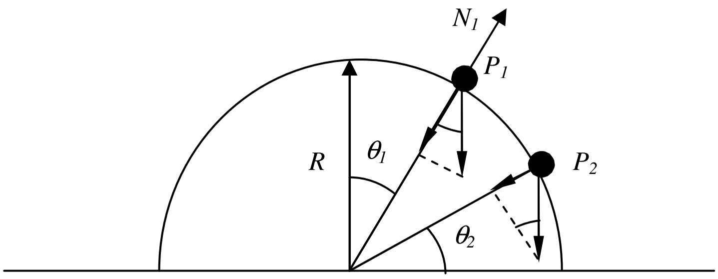
$$v = \sqrt{\frac{k}{M} \Delta L^2 + 2\mu_d g \Delta L} = \sqrt{\frac{20}{1}(0.5)^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 9.8 \cdot 0.5} \cong 2.73 m/s$$

<u>**Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica**</u>

52) Una particella, partendo da ferma dal punto P_1, si muove sulla superficie liscia di un cilindro di raggio R. Nel punto P_2 la particella lascia il cilindro. Supponendo noto θ_1, trovare l'angolo θ_2 in corrispondenza del quale si ha il distacco.



Soluzione



Poiché la superficie del cilindro è liscia, possiamo applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica fra la posizione P_1 e la posizione P_2 della particella.
Nella posizione P_1 la particella possiede solo energia potenziale, in quanto parte da ferma, quindi:

$$E_{mecc,1} = U_1 = m\, g\, R \cos\theta_1$$

Nella posizione P_2, la particella possiede sia energia potenziale che energia cinetica, quindi:

$$E_{mecc,2} = E_{c,2} + U_2 = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, R \sin\theta_2$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si deve avere che:

$$E_{mecc,1} = E_{mecc,2}$$

cioè:

$$m\, g\, R \cos\theta_1 = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, R \sin\theta_2 \qquad (1)$$

Si è ottenuta quindi un'equazione nelle due incognite v e θ_2. Per ricavare un'altra relazione che lega v e θ_2 scriviamo la seconda legge di Newton in direzione radiale:

$$\Sigma F = m\, a_c$$

$$P \sin \theta_2 - N = m a_c$$

Poiché il punto P_2 è quello in cui avviene il distacco, allora la reazione vincolare (forza normale) è nulla ($N = 0$); l'unica forza che agisce sulla particella, nella posizione P_2, è quindi la componente radiale della forza peso. L'equazione del moto lungo la direzione radiale, nella posizione P_2 di distacco è quindi:

$$m g \sin \theta_2 = m \frac{v^2}{R}$$

da cui

$$v^2 = R g \sin \theta_2$$

Sostituendo questo valore di v^2 nell'equazione (1) che rappresenta la conservazione dell'energia meccanica si ottiene la relazione cercata:

$$g\, R \cos\theta_1 = \tfrac{1}{2}\, g\, R \sin\theta_2 + g\, R \sin\theta_2$$

da cui, semplificando e sommando, si ottiene:

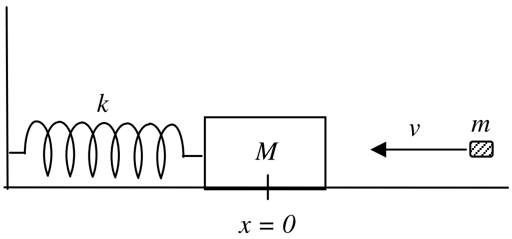
$$\sin \theta_2 = \frac{2}{3} \cos \theta_1 .$$

53) Un blocco di massa M, in quiete su un piano orizzontale privo di attrito, è connesso a un supporto mediante una molla di costante elastica k. Un proiettile di massa m e velocità v colpisce il blocco e rimane conficcato in esso. Determinare:

a) la massima compressione A della molla;

b) il tempo necessario per raggiungere la posizione di massima compressione.

Soluzione



a) Il proiettile dopo l'urto resta conficcato nel blocco, quindi l'urto è completamente anelastico. La velocità V con cui il sistema blocco + proiettile comincia a muoversi si può ricavare dalla legge di conservazione della quantità di moto:

$$m\,v = (m + M)\,V$$

da cui

$$V = \frac{m}{m+M}v$$

Dopo l'urto il sistema blocco + proiettile, partendo da una velocità iniziale V, comincia a comprimere la molla. Non essendo presenti forze di attrito, si ha conservazione dell'energia meccanica fra l'stante immediatamente dopo l'urto e l'stante in cui si raggiunge la massima compressione della molla. L'energia meccanica iniziale immediatamente dopo l'urto è solo energia cinetica del sistema blocco + proiettile. In corrispondenza del punto di massima compressione A della molla la velocità del sistema blocco + proiettile si annulla. L'energia meccanica finale è solo energia potenziale elastica. Quindi possiamo scrivere:

$$\tfrac{1}{2}\,(m + M)\,V^2 = \tfrac{1}{2}\,k\,A^2$$

Sostituendo il valore trovato per V:

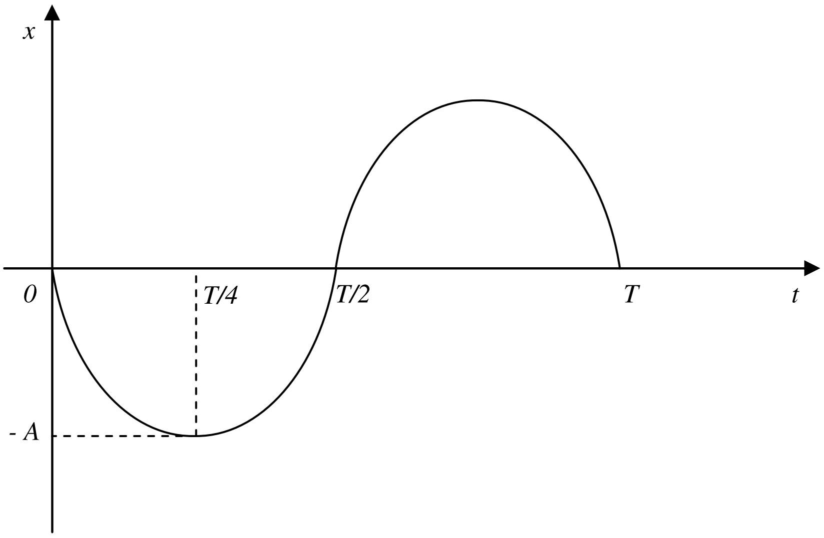
$$\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

si ricava:

$$A = \sqrt{\frac{m^2 v^2}{k(m+M)}} = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$$

b) Per rispondere al quesito b) osserviamo che non possono essere applicate le relazioni cinematiche ricavate nel caso di moto rettilineo uniformemente accelerato in quanto la forza che si esercita sul blocco non è costante ($F = - kx$). Ricordiamo che il moto effettuato da una massa m attaccata ad una molla di costante elastica k è un moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Il periodo del moto $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il tempo necessario per compiere un'oscillazione completa che è pari a 4 volte il tempo per andare dalla posizione $x = 0$ alla posizione di massima compressione $x = - A$. Graficamente infatti:

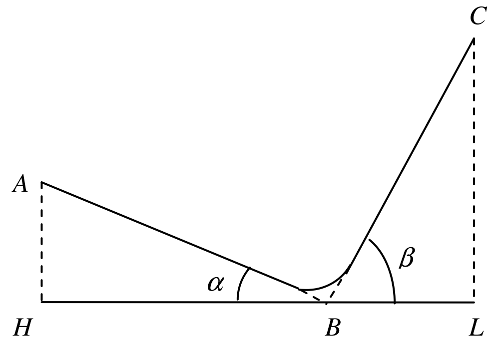


Quindi:

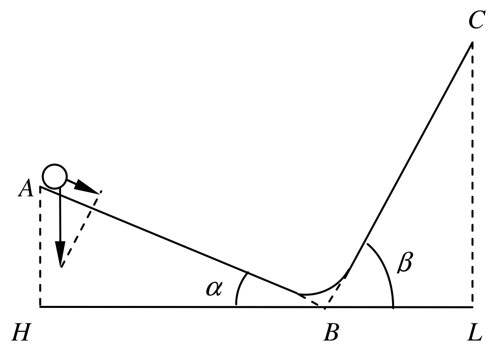
$$t_{(O \to -A)} = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{k}{m+M}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

54) Siano dati due piani inclinati con attrito raccordati alla base e disposti come in figura. Si chiede la velocità con cui deve essere lanciata una massa *m* da *A* affinché, seguendo il tragitto *ABC*, arrivi in *C* con velocità nulla.
[Dati: $y_A = 0.7\ m$; $y_C = 1.5\ m$; $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$; μ_1 (coefficiente d'attrito dinamico lungo *AB*) = 0.6; μ_2 (coefficiente d'attrito dinamico lungo *BC*) = 0.3]



Soluzione



$y_A = 0.7\ m$
$y_C = 1.5\ m$
$\alpha = 30°$
$\beta = 60°$
$\mu_1 = 0.6$
$\mu_2 = 0.3$

$v_A = ?$

Data la presenza di forze di attrito lungo i tratti inclinati *AB* e *BC*, affinché la massa posta in *A* possa raggiungere il punto *C* (con velocità nulla), l'energia meccanica totale (cinetica + potenziale) posseduta dalla particella nella posizione *A* deve essere maggiore dell'energia meccanica totale (solo potenziale) nella posizione *C*. In presenza di forze non conservative l'energia meccanica totale non si conserva, ma la sua variazione è proprio uguale al lavoro (negativo) fatto dalle forze non conservative (in questo caso forze di attrito):

$$\Delta E_{tot} = E_{tot,\,fin} - E_{tot,\,in} = L_{attr}$$

L'energia dissipata E_{diss} è

$$E_{diss} = E_{tot,\,in} - E_{tot,\,fin} = -L_{attr} = |L_{attr}|$$

Si deve quindi avere:

$$E_{tot,in} = E_{tot,fin} + E_{diss} \qquad (1)$$

Ma

$$E_{tot,in} = E_{c,A} + U_A = ½\, m\, v_A^2 + m\, g\, y_A$$

$$E_{tot,fin} = E_{c,C} + U_C = 0 + m\, g\, y_C$$

$$E_{diss} = |L_{attr}| = |L_{attr\,(AB)}| + |L_{attr\,(BC)}|$$

I moduli dei lavori fatti dalle forze di attrito sono dati da:

$|L_{attr\,(AB)}| = \mu_1 N_{AB}\, AB = \mu_1\, m\, g\, cos\alpha\, AB = \mu_1\, m\, g\, cotg\alpha\, y_A$ (poiché $AB = y_A / sin\alpha$)

$|L_{attr\,(BC)}| = \mu_2 N_{BC}\, BC = \mu_2\, m\, g\, cos\beta\, BC = \mu_2\, m\, g\, cotg\beta\, y_C$ (poiché $BC = y_C / sin\beta$)

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$½\, m\, v_A^2 + m\, g\, y_A = m\, g\, y_C + \mu_1\, m\, g\, cotg\alpha\; y_A + \mu_2\, m\, g\, cotg\beta\; y_C$$

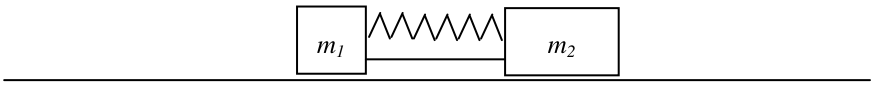
Semplificando m in entrambi i membri e moltiplicando per 2 si ottiene:

$$v_A^2 = -\,2\, g\, y_A + 2\, g\, y_C + 2\, \mu_1\, g\, cotg\alpha\; y_A + 2\, \mu_2\, g\, cotg\beta\; y_C$$

e quindi:

$$v_A = \sqrt{-2g\, y_A + 2g\, y_C + 2\mu_1 g \cot\alpha\, y_A + 2\mu_2 g \cot\beta\, y_C} \cong 5.92 m/s$$

55) Una molla di massa trascurabile è mantenuta compressa fra due blocchi di massa $m_1 = 1kg$ ed $m_2 = 2kg$ tramite un filo di massa trascurabile avente gli estremi fissati ad m_1 ed m_2 come mostrato in figura. Il sistema è in quiete, appoggiato sopra una superficie orizzontale priva di attrito. Il filo viene tagliato e la molla, i cui estremi non sono fissati a nessuna delle due masse, cade sulla superficie dopo che si è allungata. Sapendo che il blocco m_2 acquista una velocità $v_2 = 0.5\ m/s$, calcolare l'energia ceduta dalla molla al sistema.



Soluzione

Sul sistema $m_1 + m_2 + molla$ non agiscono forze esterne in direzione orizzontale, quindi si conserva la quantità di moto in direzione x. Si può scrivere quindi:

$$p_{in} = p_{fin}$$

$$0 = - m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Il segno – in v_1 sta ad indicare che v_1 punta in verso opposto a quello convenzionalmente scelto come positivo (verso destra). Dalla relazione di sopra si ricava la velocità v_1 acquistata da m_1

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 = \frac{2}{1} \cdot 0.5 = 1 m/s$$

Non essendo presenti forze d'attrito, l'energia meccanica si conserva. Quindi:

$$E_{mecc,\ in} = E_{mecc,\ fin}$$

L'energia meccanica iniziale è solo energia potenziale elastica immagazzinata nella molla; l'energia meccanica finale è solo energia cinetica delle due masse:

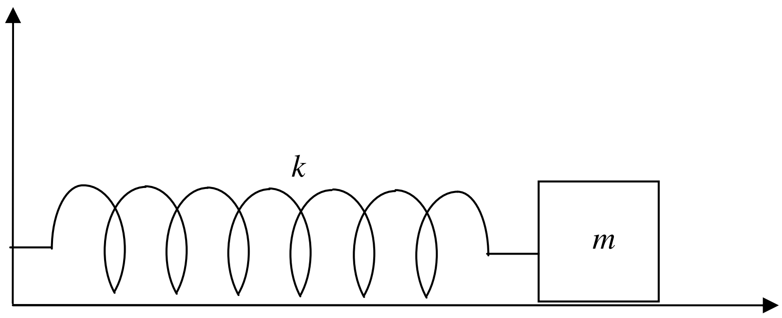
$$E_{molla} = E_{c,1} + E_{c,2}$$

$$E_{molla} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0.5)^2 = 0.75 J$$

L'energia potenziale elastica posseduta dalla molla inizialmente compressa è stata interamente trasformata in energia cinetica delle due masse che si muovono in verso opposto.

56) Un sistema oscillante massa-molla ha un'energia meccanica $E_{mecc} = 2J$, un'ampiezza di oscillazione $A = 10\ cm$ e una velocità massima $v_{max} = 1m/s$. Determinare :

a) la costante elastica k della molla;
b) la massa m del blocco;
c) la pulsazione angolare ω di oscillazione.



Soluzione

Il sistema oscillante massa-molla non è soggetto a forze d'attrito; quindi durante il suo moto l'energia meccanica totale si mantiene costante. In ogni punto l'energia meccanica totale del sistema E_{tot} è data dalla somma dell'energia potenziale elastica della molla E_{pot} e l'energia cinetica E_c della massa m, cioè:

$$E_{tot} = E_c + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

a) Nella posizione in cui la molla ha raggiunto la sua massima compressione A, la massa m ha velocità nulla, quindi l'energia meccanica totale del sistema è uguale all'energia potenziale elastica della molla. i si ricava:

(in $x = A$)
$$E_{tot} = E_{pot,max} = \frac{1}{2}kA^2$$

e quindi:
$$k = \frac{2E_{tot}}{A^2} = \frac{2 \cdot 2}{(0.1)^2} = 400N/m$$

b) Nella posizione di riposo della molla, cioè nella posizione in cui la molla non è né allungata né compressa ($x=0$) , la massa m ha velocità massima v_{max} .L'energia meccanica totale del sistema è solo energia cinetica della massa, cioè:

(in $x = 0$)
$$E_{tot} = E_{c,max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

da cui
$$m = \frac{2E_{mecc}}{v_{\max}^2} = \frac{2 \cdot 2}{(1)^2} = 4kg$$

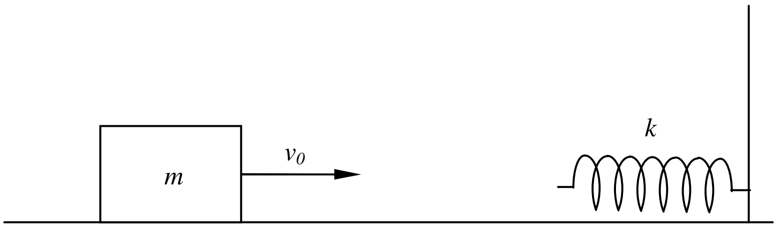
c) La pulsazione del moto armonico del sistema massa-molla è data dalla:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = \sqrt{100} = 10\ rad/s.$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

57) Sopra un piano privo di attrito un corpo di massa $m = 2kg$ che si muove con velocità $v_o = 5m/s$ si aggancia all'estremo libero di una molla avente costante elastica $k = 49\ N/m$ e l'altro estremo fisso. L'aggancio avviene nella direzione dell'asse della molla. Determinare il periodo, l'ampiezza delle oscillazioni e la legge oraria del moto.

Soluzione



$m = 2kg$
$v_o = 5m/s$
$k = 49\ N/m$

$T = ?$
$A = ?$
$x(t) = ?$

Una massa attaccata ad una molla compie un moto armonico di pulsazione ω pari a:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{49}{2}} \cong 4.95\, rad/s$$

per cui il periodo T del moto sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.95} \cong 1.27 s$$

In assenza di attrito si conserva l'energia meccanica totale. Quindi :

$$E_{mecc,in} = E_{mecc,fin}$$

L'energia meccanica iniziale è solo energia cinetica della massa m. L'energia meccanica finale è solo energia potenziale elastica della molla.

$$E_c = E_{molla}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2$$

da cui

$$A^2 = \frac{mv_0^2}{k} \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5^2}{49}} \cong 1.01m$$

Una volta colpita la molla, la massa m fa un moto armonico semplice, la cui legge oraria è data in generale, da
:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

dove A è l'ampiezza massima di oscillazione, ω è la pulsazione e δ è la fase iniziale. I valori di A e ω sono noti, mentre la fase iniziale δ è incognita. Per calcolare δ consideriamo le condizioni iniziali di posizione e velocità della particella. All'istante $t = 0$, lo spostamento $x(t=0)$ è nullo. Quindi:

$$x(t = 0) = A \cos\delta = 0$$

da cui
$$\cos\delta = 0$$

L'espressione della velocità $v(t)$ si ricava derivando la legge oraria $x(t)$:

$$v(t) = - \omega A \sin(\omega t + \delta)$$

All'istante $t = 0$, la velocità della particella $v(t=0)$ *è uguale a* v_0.

$$v(t = 0) = - \omega A \sin\delta = v_0$$

e cioè:

$$\sin\delta = \frac{v_0}{-\omega A} = \frac{5}{-4.95 \cdot 1.01} = -1$$

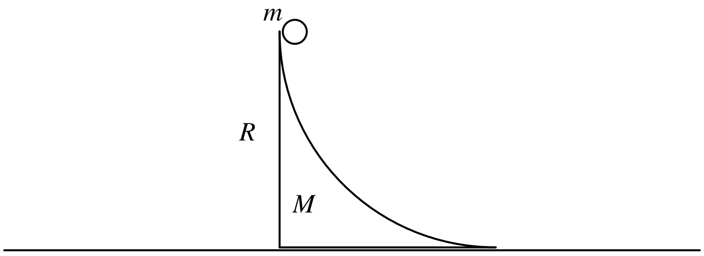
L'angolo δ il cui coseno è zero e il cui seno è -1 è $\delta = -\pi/2$.

Quindi la legge oraria di questo moto armonico è:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin\omega t$$

$$x(t) = 1.01 \sin 4.95\, t$$

58) Su uno scivolo la cui sezione è un quarto di circonferenza di raggio $R = 30\ cm$ viene fatto scendere, con velocità iniziale nulla, un corpo di massa $m = 2kg$ da un'altezza, rispetto al piano orizzontale, pari ad R. Sia $M = 4kg$ la massa dello scivolo e sia trascurabile l'attrito fra questo e il piano orizzontale su cui poggia e fra il corpo e la superficie dello scivolo. Quale sarà la velocità dello scivolo dopo che il corpo ha raggiunto il piano orizzontale?



Soluzione

Sul sistema *corpo + scivolo* non agiscono forze esterne in direzione orizzontale, quindi si conserva la quantità di moto lungo l'asse x. Prima che il corpo di massa m venga lasciato scivolare le quantità di moto del corpo e del blocco sono entrambe nulle. Quando il corpo raggiunge il piano orizzontale ha una velocità v diretta verso destra , mentre lo scivolo ha acquistato una velocità V diretta verso sinistra.

$$p_{in} = p_{fin}$$

$$0 = m\,v - M\,V$$

La velocità V acquistata dallo scivolo M quando il punto materiale m raggiunge il piano orizzontale è pari a:

$$V = \frac{m}{M}v$$

Sul sistema inoltre non agisce alcuna forza d'attrito, quindi si conserva l'energia meccanica totale fra la situazione iniziale e quella finale, in cui il corpo ha raggiunto il piano orizzontale. L'energia potenziale iniziale del punto materiale si trasforma quindi interamente in energia cinetica del corpo stesso e dello scivolo, cioè:

$$E_{mecc,\,in} = E_{mecc,\,fin}$$

$$U_{in} = E_{c,1} + E_{c,2}$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

Sostituendo il valore trovato per V:

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v^2$$

da cui $$v = \sqrt{\frac{2gR}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.8\cdot 0.3}{\left(1+\frac{2}{4}\right)}} \cong 2m/s$$

Quindi: $$V = \frac{m}{M}v = \frac{2}{4}\cdot 2 \cong 1m/s$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

59) Si abbiano due sferette *A* e *B* aventi la stessa massa *m*. Ad *A* è fissata una molla di massa trascurabile e costante elastica *k*. Inizialmente *A* è ferma, mentre *B* si muove in direzione di *A* con velocità *v* diretta secondo l'asse della molla. Quando la sferetta *B* entra in contatto con l'estremo libero della molla vi rimane attaccata e, quando la molla si è accorciata di una lunghezza *d*, un opportuno congegno meccanico blocca la molla. Si chiede la velocità iniziale *v* di *B* e la velocità finale *V* di tutto il sistema (*A*+*molla*+*B*).
Dati*: m = 0.5 kg*; *k = 100 N/m; d = 5 cm.* Si supponga tutto il sistema su un piano orizzontale e trascurabili tutti gli attriti.

Soluzione

Non essendo presenti forze esterne in direzione orizzontale ed essendo l'urto completamente anelastico, allora si conserva la quantità di moto, cioè:

$$p_{in} = p_{fin}$$

$$m\,v = (m + m)\,V$$

e quindi

$$V = \tfrac{1}{2}\,v$$

Poiché non sono presenti forze dissipative, si conserva anche l'energia meccanica. Quindi:

$$E_{mecc,\,in} = E_{mecc,\,fin}$$

$$E_{c,B} = E_{c,A+B} + E_{molla}$$

cioè

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+m)V^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

sostituendo il valore di *V* trovato

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = kd^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2kd^2}{m}} = d\sqrt{\frac{2k}{m}} = 0.05\sqrt{\frac{2\cdot 100}{0.5}} = 1m/s$$

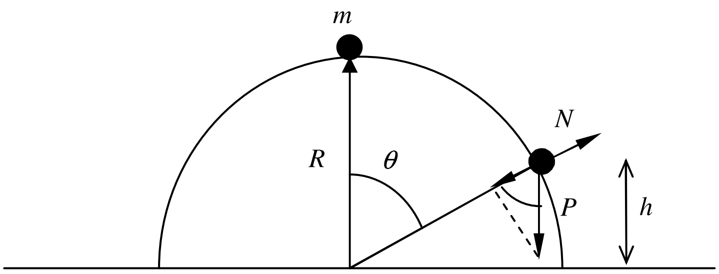
e quindi

$$V = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\cdot 1 = 0.5m/s\,.$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

60) Un ragazzo è seduto sulla sommità di una calotta semisferica di raggio R priva di attrito. Se il ragazzo incomincia a scivolare partendo da fermo, a quale altezza h dal suolo si stacca dalla calotta?

Soluzione



Per le proprietà trigonometriche:

$$h = R\cos\theta \qquad (1)$$

Essendo la superficie della calotta liscia, allora conserva l'energia meccanica fra la posizione iniziale e la posizione finale (quella in cui si ha il distacco) del ragazzo.
Nella posizione iniziale, il ragazzo possiede solo energia potenziale, in quanto parte da fermo; nella posizione finale, il ragazzo possiede sia energia potenziale che energia cinetica, quindi:

$$E_{mecc,in} = E_{mecc,fin}$$

$$m\,g\,R = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,h \qquad (2)$$

Si è ottenuta quindi un'equazione nelle due incognite v e h. Per ricavare un'altra relazione che lega v e h si scrive la seconda legge di Newton in direzione radiale:

$$\Sigma F = m\,a_c$$

$$P\cos\theta - N = ma_c$$

Nel punto finale, quello in cui avviene il distacco, la reazione vincolare è nulla ($N = 0$) e quindi l'unica forza che agisce è la componente radiale della forza peso. L'equazione del moto lungo la direzione radiale, nella posizione finale, è quindi:

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

da cui

$$v^2 = Rg\cos\theta = gh \qquad \text{(per la (1))}$$

Sostituendo questo valore di v^2 nell'equazione (2) che rappresenta la conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

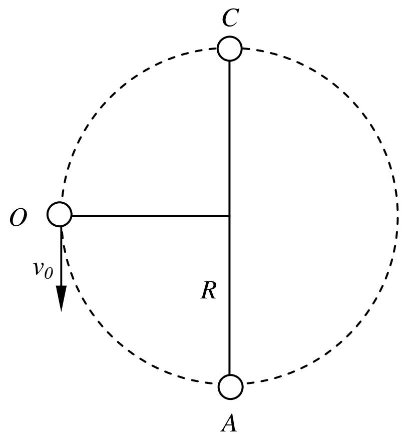
$$g\,R = \tfrac{1}{2}\,g\,h + g\,h$$

da cui, semplificando e sommando, si ottiene:

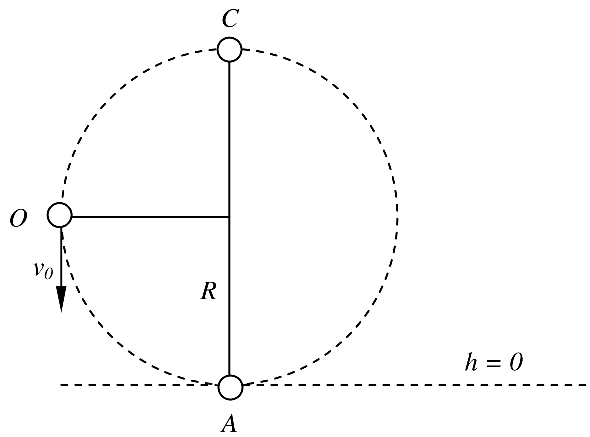
$$h = \frac{2}{3}R.$$

Fisica 1 (A.A. 2004/2005) Esercizi Meccanica

61) Una pallina di massa m è attaccata ad un filo di massa trascurabile e si muove lungo una circonferenza verticale di raggio R. Nel punto O le viene impressa una velocità iniziale v_0 come mostrato in figura. Si determinino in funzione di m, g ed R la velocità della pallina e la tensione del filo nel punto A. Qual è la velocità minima che deve essere impressa in O alla pallina affinché il filo non si allenti prima che la pallina raggiunga in punto C?



Soluzione



a) v_A = ?

b) T_A = ?

c) $v_{0,min}$ = ?

a) Assumendo il riferimento scelto in figura, tra la posizione O e la posizione A si ha la conservazione dell'energia meccanica totale, per cui:

$$E_{mecc,O} = E_{mecc,A}$$

$$E_{c,O} + U_O = E_{c,A}$$

$$\frac{1}{2}mv_O^2 + mgR = +\frac{1}{2}mv_A^2$$

e quindi

$$v_A = \sqrt{v_O^2 + 2gR}$$

b) Nel punto A la pallina è soggetta, verticalmente, alla forza peso P e alla tensione del filo T_A e subisce un'accelerazione centripeta a_c per cui l'equazione del moto in questa direzione sarà:

$$T_A - P = m\, a_c$$

cioè

$$T_A - mg = m\frac{v_A^2}{R}$$

sostituendo il valore di v_A trovato precedentemente:

$$T_A = mg + m\frac{v_O^2 + 2gR}{R} = mg + \frac{mv_O^2}{R} + 2mg = 3mg + \frac{mv_O^2}{R}$$

c) Per la conservazione dell'energia meccanica fra le posizioni O e C si ha:

$$E_{mecc,O} = E_{mecc,C}$$

$$E_{c,O} + U_O = E_{c,C} + U_C$$

$$\frac{1}{2}mv_O^2 + mgR = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg2R \qquad (1)$$

Per calcolare la velocità v_C della pallina nel punto C si consideri l'equazione del moto in quel punto:

$$T_C + P = m\, a_c$$

(poiché nel punto C il peso e la tensione hanno la stessa direzione).
Nel punto C però la tensione del filo è nulla quindi:

$$mg = m\frac{v_C^2}{R}$$

quindi

$$v^2_C = gR$$

sostituendo questo valore nella (1) si ha:

$$\frac{1}{2}mv_{O,\min}^2 + mgR = \frac{1}{2}mgR + mg2R$$

$$v_{O,\min}^2 = -2gR + gR + 4gR = 3gR$$

da cui

$$v_{O,\min} = \sqrt{3gR}$$