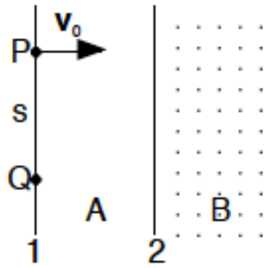
ESERCIZI SVOLTI DI FISICA GENERALE II

PARTE II

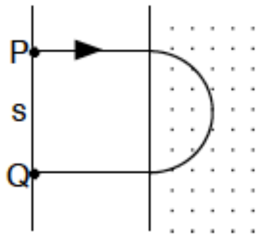
Due griglie metalliche estese, alle quali è applicata un d.d.p. costanteV_1-V_2 = 5,0·10^3 V, definiscono le due regioni di spazio A e B della figura.
Nella regione B vi è un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano del foglio. In un punto P della prima griglia viene immesso un protone con velocità v_0 = 10^6 m/s diretta come mostrato. Il protone attraversa la regione A, entra nella B e ritorna nella regione A, arrivando alla fine nel punto Q a distanza s = 5,0 cm da P.



Determinare:
a) modulo e verso di B;
b) l'energia cinetica del protone in Q;
c) il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche durante lo spostamento del protone dalla prima alla seconda griglia.

SOLUZIONE:

La forza magnetica che agisce sul protone nella regione A è tale da farlo curvare verso il basso, come in figura. La regola della mano destra ci dice subito che il campo **B** deve uscire dal foglio.



La d.d.p. tra le due griglie crea nella regione A un campo elettrostatico che ha l'effetto di accelerare il protone, il quale giunge sulla seconda griglia con una velocità che si può facilmente ricavare imponendo la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{1}{2}m_p v_0^2 + q(V_1 - V_2) \qquad \text{da cui} \qquad v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2q}{m_p}(V_1 - V_2)} \approx 1{,}4 \cdot 10^6 \ \text{m/s}$$

Nella regione B la traiettoria descritta dal protone è, com'è noto, una circonferenza il cui raggio è legato alla velocità v e al modulo B del campo magnetico dalla condizione

$$qvB = m_p \frac{v^2}{r}$$

Imponendo $r = \frac{s}{2}$ si ottiene subito $B = \frac{2m_p v}{qs} = \frac{2m_p}{qs}\sqrt{v_0^2 + \frac{2q}{m_p}(V_1 - V_2)} = 0{,}56 \ \text{T}$

Poiché la forza di Lorentz è perpendicolare alla velocità della carica, in tutta la regione B non viene compiuto alcun lavoro sul protone che quindi descrive un moto a velocità costante. Una volta giunto in A, comincia a rallentare fino ad arrivare in Q con la stessa velocità con cui era partito da P (è ancora una volta la legge di conservazione dell'energia che porta a questa conclusione).
Si ha pertanto

$$K_Q = K_P = \frac{1}{2}m_p v_0^2 = 8 \cdot 10^{-16} \ \text{J}$$

Da quanto sopra è poi evidente che il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche nel percorso tra P e la griglia 2 vale

$$L = q(V_1 - V_2) = 8 \cdot 10^{-16} \ \text{J}$$

Invertendo il segno della d.d.p. il protone, invece di accelerare, rallenta. Le possibilità sono due:
- il rallentamento è tale da non permettergli di arrivare alla griglia 2. In questo caso si ha un moto rettilineo uniformemente decelerato: a un certo punto il protone si ferma per tornare poi indietro verso P dove arriva con la stessa velocità con cui era partito.
- il protone riesce ad arrivare nella regione B ma con velocità minore di quella calcolata sopra. La traiettoria è ancora quella in figura, ma la semicirconferenza ha raggio <s/2. Il protone arriva sulla griglia 1 in un punto compreso tra P e Q e sempre con la stessa velocità con cui era partito.

Due fili conduttori rettilinei infiniti percorsi dalla stessa corrente sono piegati in modo da formare una spira come mostrato nelle due figure.

(a) (b)

a) Calcolare il rapporto tra i due moduli dei campi magnetici **B** nei centri delle spire, supposte di ugual raggio.
b) Per il filo della figura (a) calcolare il modulo del campo **B** in un punto ad altezza h = 5,0 cm sull'asse della spira [siano r = 2,0 cm il raggio della spira e i = 1,0 A la corrente che percorre il filo].

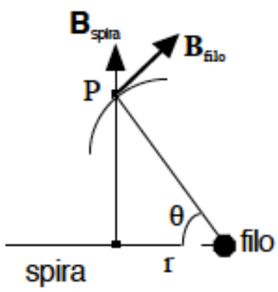
SOLUZIONE:

Ricordiamo le espressioni necessarie.
Campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito in un punto a distanza *d* dal filo:
$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d}$; le linee di forza sono cerchi concentrici al filo e disposti perpendicolarmente ad esso, con versi stabiliti dalla regola della mano destra.

Campo magnetico generato da una spira di raggio *r* in un punto del suo asse a distanza *h* dal piano della spira:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{r^2}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$$

; questo campo ha direzione perpendicolare al piano della spira e verso determinato dalla regola della mano destra. In particolare, al centro della spira, $B = \frac{\mu_0 i}{2r}$.
Rimane ora da mettere assieme i risultati sopra esposti.
Forse può essere conveniente rappresentare il tutto in modo che il filo e la spira siano disposti perpendicolarmente alla pagina.



I versi delle frecce presuppongono che la corrente nel filo entri nel foglio.

Scegliamo poi l'origine degli assi nel punto di incontro tra filo e spira, l'asse x orientato verso sinistra e l'asse y orientato verso l'alto.

È subito evidente che al centro della spira i due campi hanno la stessa direzione e stesso verso nel caso (a), ma verso opposto ne caso (b)

Avremo quindi

$$B_a = B_{a\ filo} + B_{a\ spira} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} + \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{r} = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{r}\left(\frac{1}{\pi}+1\right)$$

e

$$B_b = B_{b\ filo} + B_{b\ spira} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} - \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{r} = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{r}\left(\frac{1}{\pi}-1\right)$$

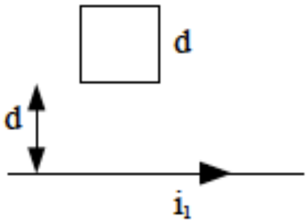
Pertanto

$$\frac{B_a}{B_b} = \frac{\pi+1}{\pi-1} = 1{,}9$$

Nel punto P occorrerà sommare vettorialmente i due campi

$$B_x = B_{filo_x} = -B_{filo}\sin\theta = -\frac{\mu_0}{2\pi}i\frac{h}{\frac{r^2}{4}+h^2}$$

$$B_y = B_{filo_x} + B_{spira} = B_{filo}\cos\theta + B_{spira} = \frac{\mu_0}{2}i\left[\frac{r^2}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{r/2}{\frac{r^2}{4}+h^2}\right]$$



Una bobina rigida quadrata di lato d, formata da N = 10 spire, è posta a distanza d da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente $i_1 = 100$ A. Bobina e filo stanno nello stesso piano orizzontale. Quando la bobina è percorsa da una corrente i_2 occorre applicare una forza $F = 1{,}96 \cdot 10^{-4}$ N, ortogonale al filo, per impedirle di andare verso il filo.

a) Calcolare il valore di i_2;

b) calcolare il lavoro necessario per far compiere alla bobina una traslazione che la allontani dalla distanza d fino alla distanza 2d dal filo.

SOLUZIONE:

Le forze rilevanti ai fini dell'esercizio sono solo quelle che si esercitano tra il filo e i due lati della bobina ad esso paralleli. Infatti le forze agenti sugli altri due lati sono parallele al filo e non tendono né ad avvicinare né ad allontanare la bobina.

Nelle condizioni descritte dal problema (distanza d) le due forze sono ben note:

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 \frac{l}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 \frac{d}{d}$$ quella agente sul lato più vicino e

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 \frac{l}{2d} = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 \frac{d}{2d}$$ quella agente sul lato più lontano.

Poiché la corrente i_2 percorre i due tratti in versi opposti, le due forze avranno versi opposti. Quale delle due sia attrattiva e quale repulsiva dipenderà dal verso di i_2. Tale verso può essere facilmente determinato, poiché l'enunciato del problema ci informa che la forza risultante tende ad avvicinare la bobina al filo.

La forza risultante risulta allora $F = |F_1 - F_2|$
e la conoscenza del suo valore consente la determinazione della corrente i_2:

$$i_2 = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{1}{N i_1} F = 1{,}96 \text{A}$$

Il valore della forza risultante dipende dalla distanza tra filo e bobina: quello calcolato sopra corrisponde alla situazione in cui la bobina si trova alla distanza d.
Se la bobina si trova alla generica distanza x:

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 \frac{d}{x} \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 \frac{d}{x+d}$$

Pertanto

$$L = \int_d^{2d} F dx = \int_d^{2d} (F_1 - F_2) dx = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 d \left[\int_d^{2d} \frac{dx}{x} - \int_d^{2d} \frac{dx}{x+d} \right] = \frac{\mu_0}{2\pi} N i_1 i_2 d \ln\frac{3}{4} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\, d \ \text{J}$$

Un conduttore cilindrico di raggio R = 2,5 cm è percorso da una corrente I = 2,5 A distribuita uniformemente sulla sezione del conduttore.
a) Calcolare il valore dell'induzione magnetica in un punto posto a metà strada lungo il raggio (cioè per r = R/2).
b) Determinare a che distanza dalla superficie del conduttore (ed esternamente ad esso) si ha una induzione magnetica uguale a quella calcolata in a).
c) Calcolare il flusso magnetico concatenato con una sezione diametrale del conduttore di altezza unitaria

SOLUZIONE:

La risposta alla prima domanda si trova in un qualunque testo di fisica nel capitolo che tratta delle applicazioni del teorema di Ampère, in cui viene dimostrato che il campo di induzione magnetica all'interno di un conduttore cilindrico è, a distanza *r* dall'asse del cilindro, dato da

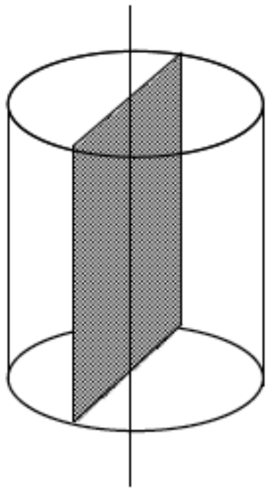
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Con i dati numerici del problema, $B(R/2) = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ T

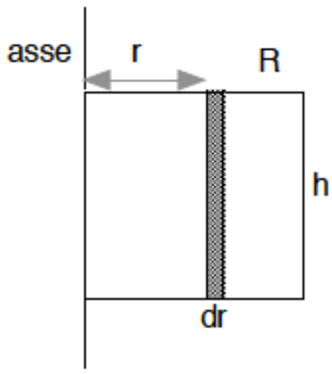
D'altra parte, il campo di induzione magnetica esternamente al conduttore, a distanza *x* dall'asse, è dato dalla ben nota espressione

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ che assume lo stesso valore trovato in precedenza per $x = 2R = 5{,}0$ cm

Per rispondere all'ultima domanda occorre ricordare che le linee di forza del vettore ***B*** sono, esternamente ed internamente al conduttore, circonferenze col centro sull'asse del cilindro e disposte perpendicolarmente ad esso. Il verso dipenderà dal verso della corrente.
Se consideriamo allora una sezione diametrale come quella in figura, il campo ***B*** sarà in tutti i punti ad essa perpendicolare.
Osserviamo tuttavia che il valore di ***B*** non è lo stesso in tutti i punti della sezione, data la sua dipendenza da *r*.



Dato che il contributo al flusso della metà destra della sezione coincide con quello della metà sinistra, basta poi limitarsi a calcolare uno solo dei due e moltiplicare il risultato per 2.



Se si considera allora un rettangolino infinitesimo (come quello tratteggiato in figura, di base *dr* e altezza *h*=1) si può ritenere che il campo ***B*** sia costante al suo interno e quindi il suo flusso concatenato col rettangolino è semplicemente dato dal valore di ***B*** moltiplicato per l'area del rettangolino. Il flusso totale è poi dato dalla somma di tutti i flussi infinitesimi concatenati con gli infiniti rettangolini in cui la sezione si può considerare suddivisa.

Traducendo in formule

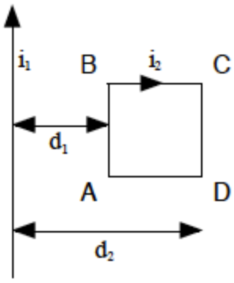
$d\phi = B(r) \cdot h \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} h \; dr$ (flusso concatenato con rettangolino a distanza *r* dall'asse)

$\Phi = 2\int_0^R d\phi = 2\frac{\mu_0}{2\pi R^2} Ih \int_0^R r dr = 2\frac{\mu_0}{2\pi R^2} Ih \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^R = 2\frac{\mu_0}{2\pi R^2} Ih \frac{R^2}{2} = \frac{\mu_0}{2\pi} Ih = 2{,}0 \cdot 10^{-7} Wb$ (flusso attraverso la sezione)

Una spira quadrata percorsa da una corrente $i_2 = 1{,}5$ A in senso orario è complanare con un filo rettilineo percorso da una corrente $i_1 = 0{,}75$ A. I lati della spira paralleli al filo si trovano a distanze $d_1 = 1{,}2$ cm e $d_2 = 2{,}4$ cm da esso. Determinare:

a) la forza che si esercita sul filo;

b) la forza che si esercita sul lato AD della spira.



SOLUZIONE:

Ovviamente, il lato della spira vale $a = d_2 - d_1$.

Osserviamo dapprima che la forza che si esercita sul filo è, per il principio di azione e reazione, numericamente uguale a quella che il filo esercita sulla spira e questa è calcolabile senza difficoltà. L'espressione della forza che si esercita tra due fili rettilinei (paralleli, a distanza d) percorsi da corrente, uno indefinito e uno di lunghezza a, è infatti ben nota:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{a}{d}$$

Ricordiamo inoltre che tale forza è attrattiva se le due correnti sono concordi e repulsiva se discordi. Nel nostro caso

$$F_{AB} = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{a}{d_1} = 2{,}25 \cdot 10^{-7} N \qquad \text{attrattiva}$$

$$F_{CD} = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{a}{d_2} = 1{,}125 \cdot 10^{-7} N \qquad \text{repulsiva}$$

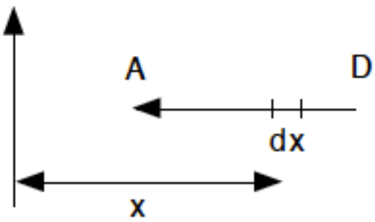
Le forze che si esercitano sugli altri due lati BC e DA sono uguali, per simmetria, e discordi, visto i versi opposti delle correnti.
Ne segue che la forza totale agente sulla spira (e quindi anche sul filo) è

$$F = F_{AB} - F_{CD} = 1{,}125 \cdot 10^{-7} N \quad \text{attrattiva.}$$

Il calcolo della forza agente sul lato AD richiede un minimo di attenzione. La difficoltà sta nel fatto che i diversi tratti elementari in cui si può pensare suddiviso si trovano a diversa distanza dal filo.

Consideriamo allora un elemento infinitesimo del tratto AD, di lunghezza dx, che si trova a distanza x dal filo.

Nel punto in cui tale elemento si trova, il campo magnetico creato dal filo vale $\quad B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{x}$



e la forza, infinitesima, a cui l'elemento è sottoposto è

$$dF = \left| i d\vec{l} \wedge \vec{B} \right| = iBdx$$

(se i versi sono quelli indicati in figura, la forza è diretta verticalmente verso il basso; ciò però non è molto importante; quello che interessa, ai fini della risoluzione dell'esercizio, è che la direzione e il verso della forza non dipendono da x. Su tutti gli elementini del tratto AD agiranno forze con la stessa direzione e lo stesso verso). La loro risultante, che sarà la forza richiesta agente sul tratto AD, si otterrà semplicemente sommando algebricamente i vari contributi infinitesimi.

Pertanto $$F = \int_A^D dF = \int_{d_1}^{d_2} i_2 B dx = \int_{d_1}^{d_2} i_2 \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{x} dx = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \ln\frac{d_2}{d_1} = 1{,}56 \cdot 10^{-7} N$$

Una spira rettangolare di sezione S = 1,0 mm^2, con lati a = 15 cm e b = 10 cm, di materiale conduttore omogeneo, ha uno dei suoi lati lunghi collegato a una molla, complanare alla spira, di costante elastica k = 12,5 N/m. L'altro lato lungo è immerso in un campo magnetico uniforme perpendicolare al lato. La spira è percorsa dalla corrente i = 1,0 A. Con la spira disposta orizzontalmente [e quindi col campo B verticale] la molla è, in condizioni di equilibrio, allungata di un tratto $\Delta x = 6{,}0$ mm.
a) Determinare l'intensità del campo magnetico. Col sistema ruotato di 90º [cioè, spira verticale e campo B orizzontale] si osserva che il minimo allungamento della molla è $\Delta x_1 = 1{,}85$ mm.
b) Qual è la densità dal materiale di cui è costituita la spira?
c) Qual è il massimo allungamento della molla?

SOLUZIONE:

Quando in un circuito immerso in un campo magnetico ***B***, viene fatta passare una corrente *i*, si crea una forza magnetica $\boldsymbol{F}_B$ data, com'è noto, da

$$\vec{F}_B = i\oint d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Nel nostro caso solo un lato di lunghezza *a* si trova nel campo magnetico e pertanto il modulo della forza magnetica vale semplicemente

$$F_B = iaB$$

In condizioni statiche tale forza deve essere equilibrata dalla forza elastica esercitata dalla molla:

$$F_B = iaB = F_{el} = k\Delta x$$

Si noti che, a seconda del verso di circolazione della corrente rispetto al campo ***B***, la forza magnetica può essere orientata verso la molla o in verso opposto. In quest'ultimo caso la molla si allunga, altrimenti si accorcia (dello stesso tratto Δx). In entrambi i casi l'espressione di sopra ci dà il valore richiesto del campo ***B***

$$B = \frac{k\Delta x}{ia} = 0{,}5 \text{ T}$$

Il secondo caso proposto dal problema non è forse formulato in maniera chiarissima. Se tutto il sistema viene disposto verticalmente, occorre anche tener conto dell'effetto della forza perso, F_p.
Questa è certamente diretta verso il basso e quindi tenderà senz'altro ad allungare la molla, mentre la forza magnetica agirà in un verso o in quello opposto a seconda di come circola la corrente rispetto al campo magnetico.
In sintesi ciò significa che in un caso le due forze F_B e F_p si sommeranno (allungamento della molla massimo), mentre nell'altro si sottrarranno (allungamento minimo).

Quindi

$$F_p - F_B = k\Delta x_1 \qquad \text{e} \qquad F_p + F_B = k\Delta x_{max}$$

Si ha poi

$$F_p = \rho S(2a + 2b)$$ essendo r la densità di massa richiesta.

Basta ora sostituire i valori numerici

$$F_p = F_B + k\Delta x_1 = k(\Delta x + \Delta x_1) = 9{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$\rho = \frac{F_p}{S(2a + 2b)} = 20 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

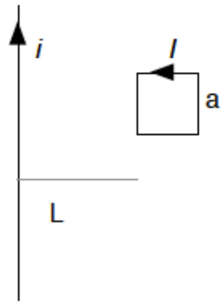
$$\Delta x_{max} = \frac{F_p + F_B}{k} = 1{,}38 \text{ cm}$$

Una spira quadrata di lato a si trova a distanza L da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente i. La spira è percorsa da una corrente I.

a) Quale forza esercita la spira sul filo?

b) Che lavoro è stato compiuto dalle forze magnetiche quando il filo è giunto all'infinito?

[Dati numerici: a = 15 cm; L = 10 cm; i = 120 mA; I = 250 mA]



SOLUZIONE:

La risposta alla prima domanda è semplice se si ricorda l'espressione della legge di Ampère che dà la forza che un filo rettilineo indefinito esercita su un tratto a di filo pure rettilineo disposto parallelamente al primo a distanza L da esso

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} iI \frac{a}{L}$$

Ricordiamo che tale forza è attrattiva se i due fili sono percorsi da correnti concordi e repulsiva se le due correnti sono discordi.

Osserviamo che:

- l'espressione precedente non fornisce i valori delle forze agenti sui lati della spira perpendicolari al filo; in realtà non è necessario conoscerli: essendo i due tratti alla stessa distanza dal filo ed essendo percorsi da correnti di verso opposto queste forze sono necessariamente uguali e contrarie e quindi si annullano a vicenda (almeno finché si suppone la spira indeformabile).
- Data la dipendenza dell'espressione precedente dall'inverso della distanza L, la forza agente sul lato più vicino (repulsiva) sarà maggiore di quella agente sul lato più lontano (attrattiva) $F = \frac{\mu_0}{2\pi} iI \frac{a}{L+a}$

Ne segue che la forza totale che si esercita tra filo e spira è repulsiva e, nelle condizioni iniziali vale

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} iI \frac{a}{L} - \frac{\mu_0}{2\pi} iI \frac{a}{L+a} = \frac{\mu_0}{2\pi} iI \left[\frac{a}{L} - \frac{a}{L+a}\right] = 5{,}4 \cdot 10^{-9} N$$

Chi non ricordasse la succitata formula di Ampère può sempre calcolarsi la forza usando la relazione di Laplace

$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ dove B è il campo creato dal circuito 1 nei punti del circuito 2 (nel quale circola una corrente i)

Ora, calcolare il campo generato dalla spira quadrata nei punti del filo rettilineo non è cosa agevole; è molto più semplice calcolare il campo generato dal filo nei punti della spira. In concreto, la forza che la spira esercita sul filo è uguale e contraria alla forza che il filo esercita sulla spira.

La seconda domanda richiede un minimo di attenzione, in quanto la forza sopra calcolata dipende dalla distanza tra i due circuiti e quindi cambia man mano che essi, per effetto della reciproca repulsione, si allontanano. Il lavoro richiesto dovrà dunque essere calcolato a partire dai contributi infinitesimi

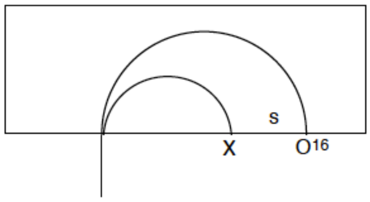
$dL = F\,dx$ (dove è stato scelto come asse x la perpendicolare al filo orientato verso la spira).

Quando il lato della spira più vicino al filo si trova a distanza x da esso, la forza agente vale

$$F(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} iI \left[\frac{a}{x} - \frac{a}{x+a}\right]$$ e pertanto

$$L = \int_L^\infty F(x)\,dx = \frac{\mu_0}{2\pi} iI \int_L^\infty \left[\frac{a}{x} - \frac{a}{x+a}\right] dx = \frac{\mu_0}{2\pi} iIa \ln\frac{L+a}{L} = 1{,}64 \cdot 10^{-9} J$$

Un fascio costituito da isotopi O^{16} ionizzati una volta (cioè con carica pari a quella dell'elettrone ma di segno opposto) e da ioni di massa sconosciuta e della stessa carica, viene accelerato da una differenza di potenziale 10^3 V. Il fascio penetra poi in un campo magnetico uniforme di induzione B = 0,3 T perpendicolare alla direzione della velocità. Sotto l'azione del campo gli ioni descrivono traiettorie semicircolari.



Determinare:

a) il raggio di curvatura della traiettoria del O^{16};

b) la massa dello ione sconosciuto sapendo che descrive una traiettoria il cui punto di uscita dal campo dista s = 7,6 mm da quello di uscita degli ioni O^{16}.

Trascurare la velocità iniziale degli ioni.

SOLUZIONE:

Prima di entrare nel campo magnetico, il fascio di ioni (ricordiamo che hanno carica positiva di valore pari a quella dell'elettrone) viene accelerato dalla d.d.p. $\Delta V = 1000\ V$.
Ciò significa che gli ioni, inizialmente fermi, vengono sottoposti all'azione di un campo elettrostatico (che sappiamo essere conservativo) e portati a una velocità che può essere facilmente determinata imponendo la conservazione dell'energia.

$K_i = 0 \qquad U_i = q\Delta V$

$K_f = \frac{1}{2}mv^2 \qquad U_f = 0$

Ne segue che gli ioni O^{16} entrano nel campo con velocità $\frac{1}{2}m_o v_o{}^2 = q\Delta V \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m_o}}$

mentre gli ioni sconosciuti vi entrano con velocità $\frac{1}{2}m_x v_x{}^2 = q\Delta V \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m_x}}$ (a priori diversa dalla precedente).

Quello che succede quando gli ioni si trovano nel campo è noto: essi sono soggetti alla forza magnetica di Lorentz che, essendo perpendicolare al vettore velocità può solo fornire un'accelerazione radiale. Nelle condizioni del problema (campo magnetico anch'esso perpendicolare alla velocità) si ha dunque, per gli ioni ossigeno

$$qv_oB = \frac{m_o v_o^2}{r_o} \qquad \text{da cui } r_o = 6{,}16 \cdot 10^{-2}\ m$$

Per quanto concerne la seconda domanda, dalla figura è evidente che $r_x = r_o - \frac{s}{2}$

e pertanto

$$qv_xB = \frac{m_x v_x^2}{r_x} \quad \text{da cui } m_x = 2{,}40 \cdot 10^{-26}\ kg$$

Osserviamo che dalle relazioni precedenti si ottiene

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2qm\Delta V}}{qB}$$

Il raggio di curvatura è cioè proporzionale alla radice quadrata della massa degli ioni, ossia

$$\frac{r_o^2}{r_x^2} = \frac{m_o}{m_x}$$

che fornisce un metodo alternativo per rispondere alla seconda domanda.

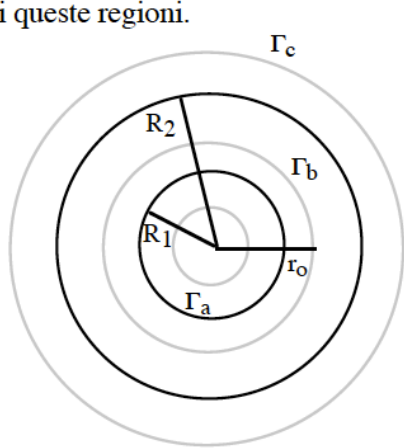
Un conduttore cilindrico cavo a pareti spesse ha raggi interno ed esterno R_1 e R_2 rispettivamente. Il conduttore è percorso da corrente longitudinale. Si osserva che a distanza R dall'asse del cilindro il campo magnetico vale B_1.
a) Determinare l'andamento del campo B in funzione della distanza r dall'asse del conduttore.
b) Calcolare il valore di B per $r=r_0$.
[Dati numerici: $R_1 = 4{,}0$ mm; $R_2 = 8{,}0$ mm; $R = 50$ cm; $r_0 = 6{,}0$ mm; $B_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ T]

SOLUZIONE:

La risoluzione dell'esercizio non richiede nulla di più del teorema di Ampère:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$ dove l'integrale va calcolato lungo una linea chiusa Γ e i è la corrente totale che attraversa una qualunque superficie circondata dalla linea.

Si identificano immediatamente tre regioni di spazio significative:
a. la regione interna al conduttore ($r<R_1$)
b. il conduttore ($R_1 \le r \le R_2$)
c. la regione esterna al conduttore ($r \ge R_2$)
Occorre calcolare il campo di induzione magnetica in ciascuna di queste regioni.



Nella regione a non c'è campo, in quanto la curva Γ_a tracciata in quella regione non racchiude nessuna corrente, mentre nella regione c il campo di induzione magnetica è uguale a quello generato da un filo rettilineo indefinito

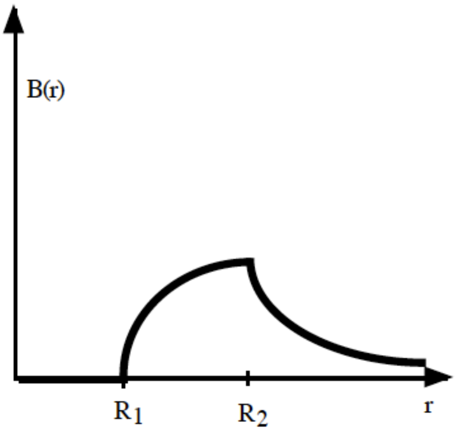
$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$

Leggermente più complicato è il calcolo del campo nella regione b. E' evidente dalla figura che la curva Γ_b non circonda tutta la corrente i ma solo la frazione i' compresa tra i due cilindri di raggi R_1 ed r.
Ora, la densità superficiale di corrente è, per definizione,

$$J = \frac{i}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \quad \text{e quindi} \quad i' = J\pi\left(r^2 - R_1^2\right) = \frac{i}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left(r^2 - R_1^2\right)$$

Un'ulteriore applicazione del teorema di Ampère, alla curva Γ_b, dà subito

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left(r^2 - R_1^2\right)\frac{1}{r}$$



L'andamento del campo B in funzione della distanza r è allora quello mostrato nella figura a fianco.

Per calcolare il campo B a distanza r_o occorre conoscere il valore della corrente i che non è un dato dal problema, ma che può essere facilmente dedotto dalla conoscenza del campo B_1 a distanza R, cioè nella regione c.

$i = \frac{2\pi R}{\mu_0} B_1 = 6{,}25 \cdot 10^2\, A$, da cui $B(r_o) = 9{,}0 \cdot 10^{-4}\, T$

Un conduttore rettilineo di lunghezza l è immerso in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al filo ed é percorso da una corrente i.

a) Il conduttore si sposta di un tratto b, parallelamente a se stesso, in un piano che forma un angolo α con le linee di forza del campo.

b) Il conduttore si sposta muovendosi sulla superficie di un cilindro, il cui asse è parallelo al conduttore, fino a ritornare alla posizione iniziale. Quale lavoro occorre compiere sul filo nei due casi?

c) Calcolare il lavoro necessario per far compiere al conduttore un giro completo attorno a un asse passante per una delle estremità e parallelo al campo B.

[Dati numerici: $l = 2{,}0$ m; $\alpha = 15°$; $B = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ T; $i = 3{,}0$ A; $b = 50$ cm]

SOLUZIONE:

La difficoltà maggiore dell'esercizio sta forse nella visualizzazione. E' richiesta, infatti, solamente l'applicazione della legge di Laplace che dà la forza agente su un filo percorso da corrente e immerso in un campo magnetico:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

Poiché il filo si mantiene in tutti i casi perpendicolare al campo, questa forza ha sempre modulo $F=ilB$.

Caso a) La forza forma un angolo α col campo $\mathbf{B}$: $L = ilBb \cdot \mathrm{sen}\alpha = 9{,}7 \cdot 10^{-4}\, J$

Si noti come il lavoro possa essere espresso nella forma

$$L = i\Phi(\mathbf{B})$$

cioè come prodotto della corrente nel filo per il flusso magnetico tagliato dal filo durante il suo moto.

Caso b) $\Phi(\mathbf{B}) = 0$ e pertanto $L = 0$

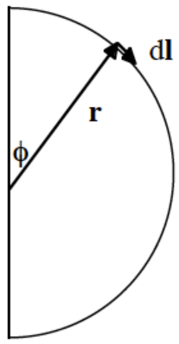
Caso c) $L = i\Phi(\mathbf{B}) = i\pi l^2 B = 4{,}7\ \ 10^{-2}\, J$

Un filo conduttore a forma di semicerchio è percorso da una corrente i=25 mA. Il raggio del semicerchio è r=10 cm.
a) Calcolare il campo magnetico nel centro del semicerchio.
b) Il filo viene posto in un campo esterno B=0,8 T perpendicolare al piano del semicerchio. Calcolare la forza a cui è soggetto.

SOLUZIONE:

Trattandosi di una semispira, il campo di induzione magnetica nel centro è la metà di quello di una spira circolare, cioè

$$B = \frac{\mu_0 i}{4R}$$ diretto perpendicolarmente al piano della semispira.



Volendo svolgere dettagliatamente i calcoli occorre usare la formula di Biot-Savart scritta nella sua forma differenziale per ottenere il contributo al campo del singolo elementino di filo, **dl**:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

da cui si vede che d**B** ha sempre, qualunque sia l'elemento **dl** che si considera, direzione perpendicolare al piano del filo e modulo (i vettori **r** e **dl** sono tra loro ortogonali)

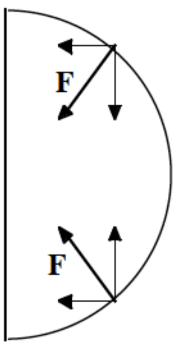
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{r^2} \qquad \text{con} \quad dl = r\, d\phi.$$

Il campo totale si ottiene sommando i contributi di tutti gli elementini infinitesimi dl, cioè integrando su $d\phi$ da 0 a π:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{r\, d\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^\pi \frac{d\phi}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\pi}{r} = \frac{\mu_0}{4} \frac{i}{r} = 78{,}5 \ nT$$

Ponendo il filo in un campo esterno B_0, un generico elementino **dl** risente della forza

$dF = i\, B_0\, dl = i\, B_0\, r\, d\phi$ (si veda la figura precedente) diretta perpendicolarmente a **dl** e $\mathbf{B}_0$,



cioè radialmente. E' evidente che le componenti verticali delle forze agenti sulla metà superiore del filo sono annullate dalle corrispondenti componenti della metà inferiore e che solo le componenti orizzontali (dF sen ϕ) danno un contributo non nullo alla forza totale.

Se ne conclude che

$$F = \int_0^\pi dF \,\text{sen}\phi\, d\phi = i\, B_0\, r \int_0^\pi \text{sen}\phi\, d\phi = 2i\, B_0\, r = 4{,}0 \cdot 10^{-3} N$$

Si osservi che la forza che si esercita sul semicerchio è la stessa che si eserciterebbe su un filo rettilineo di lunghezza $2r$.

Un fascio di particelle cariche si muove, nel vuoto, di moto rettilineo lungo l'asse x di un sistema di coordinate cartesiane, con un'energia di 45 eV, in una regione di spazio in cui sono contemporaneamente presenti un campo elettrico E = 900 V/m diretto lungo l'asse y e un campo magnetico B = $2{,}25\cdot10^{-4}$ T diretto lungo l'asse z. Rimuovendo il campo elettrico, le particelle iniziano a descrivere una traiettoria circolare di diametro 20 cm. Determinare massa e carica delle particelle.
[Nota: 1 eV = $1{,}6\cdot10^{-19}$ J]

SOLUZIONE:

Quando sono presenti i due campi E e B, affinché le particelle si muovano di moto rettilineo uniforme occorre che la forza totale sia nulla, cioè che le due forze, quella elettrica e quella magnetica, siano uguali e di verso opposto:

$$qE = qBv$$

Di qui segue

$$v = E/B = 4\cdot10^6\ m/s$$

La relazione $K = \frac{1}{2}mv^2$ permette allora di ricavare la massa delle particelle $m = \frac{2K}{v^2} = 9\ 10^{-31}\,Kg$.
Rimosso il campo elettrico, sotto l'azione del solo campo magnetico, le particelle percorrono un'orbita circolare di raggio r dato da

$$r = \frac{mv}{qB}$$

da cui si ricava

$$q = \frac{mv}{rB} = \frac{2K}{rE}.$$ Numericamente, $q = 1{,}6\cdot10^{-19}\ C$.

Se ne deduce che le particelle sono elettroni. Il segno (elettroni positivi o negativi) dipende dal verso di percorrenza dell'orbita circolare.

Uno ione idrogeno (protone) penetra in un campo magnetico uniforme normale alla sua velocità.
a) Quale dev'essere il valore dell'induzione magnetica B affinché lo ione percorra un arco di circonferenza di ampiezza $\pi/2$ in $2{,}5\cdot10^{-8}$ s ?
b) Quanto tempo impiegherebbe a percorrere lo stesso arco se entrasse nel campo con energia raddoppiata ?
c) Qual è il raggio della circonferenza descritta, per un'energia dello ione pari a 1 keV ?
[Dati numerici: massa del protone=$1{,}67\cdot10^{-27}$ Kg; 1 keV=$1{,}6\cdot10^{-16}$ J]

SOLUZIONE:

La relazione che lega il raggio della circonferenza alla quantità di moto della carica e al campo B è ben nota

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Dai dati del problema possiamo ricavare subito la velocità angolare ω del moto circolare

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\pi/2}{2{,}5\cdot10^{-8}} \quad \text{e pertanto} \quad B = \frac{m\omega}{q} = 0{,}66\ T$$

Occorre notare che B non dipende dalla velocità v, ma solo dalla velocità angolare ω. Ne segue che se cambia l'energia (e quindi la velocità), purché ω resti la stessa B non cambia o, viceversa, se B non cambia ω resta invariata: la risposta alla domanda b) è dunque

$$t = 2{,}5\cdot10^{-8}\ s$$

E' il caso di osservare che affinché ω resti invariata al variare di v, occorre che cambi il raggio della circonferenza. Infatti l'ultima domanda chiede quale sia questo raggio per un ben determinato valore K dell'energia, cioè per una velocità

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Per ricavare il raggio è sufficiente sostituire questa espressione nella formula scritta sopra:

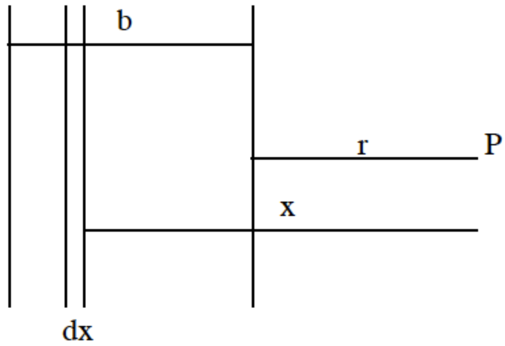
$$r = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2K}{m}} = 6{,}9\cdot10^{-3} m$$

Un nastro conduttore rettilineo, di piccolo spessore e molto lungo, ha larghezza b ed è percorso da una corrente di intensità i, costante e uniformemente distribuita sulla sezione del nastro.
a) Calcolare il valore del campo magnetico in un punto del piano del nastro a distanza r dal bordo più vicino del nastro.
[Dati numerici: b=5 cm; r=7,5 cm; i=10 A]

SOLUZIONE:

Poiché sappiamo calcolare facilmente, per esempio ricorrendo al teorema di Ampère, il campo generato da un filo rettilineo indefinito, conviene immaginare il nastro costituito appunto da un numero infinito di tali fili, ciascuno di larghezza infinitesima dx, e percorso da una corrente infinitesima $di = \frac{i}{b}dx$

Riferiamoci alla figura per le notazioni



Il campo creato dal generico filo situato a distanza x dal punto P è $\mathbf{dB}= \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{i}{b}dx\,\hat{\mathbf{n}}$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore della normale al piano del nastro orientato in modo da entrare nel foglio.

Poiché tutti i vettori **dB** sono paralleli e concordi, il campo totale creato nel punto P sarà

$$B = \int_{r}^{r+b} dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{b}\ln\frac{r+b}{r} = 2\cdot 10^{-5}T$$

Un conduttore rettilineo, cilindrico, cavo, di raggi interno a=10 cm ed esterno b=20 cm ha lunghezza molto grande rispetto al raggio b. Esso si trova nel vuoto, è costituito da materiale paramagnetico ($\mu_r \sim 1$) ed è percorso da una corrente i=100 A diretta secondo l'asse e distribuita uniformemente.

Determinare il valore del campo magnetico B(r) per i seguenti valori di r:

a) r_1=5 cm

b) r_2=15 cm

c) r_3=30 cm

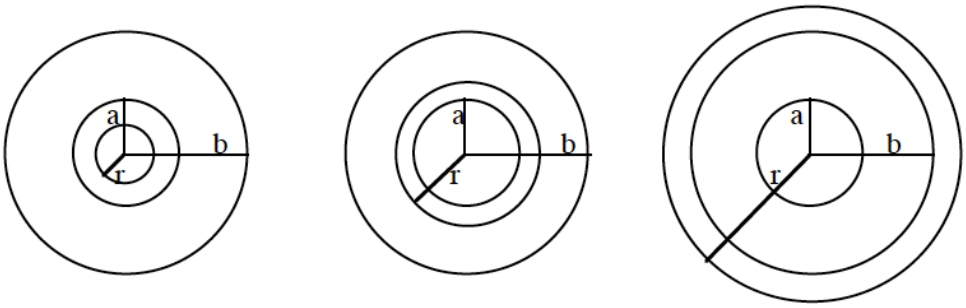
SOLUZIONE:

La simmetria del sistema suggerisce di far ricorso al teorema di Ampère $\oint_\Gamma \vec{B} \; d\vec{l} = \mu_0 i_c$

dove i_c è la corrente concatenata con la curva Γ.

Scegliamo come cammino di integrazione una circonferenza di raggio r con centro sull'asse del cilindro e giacente nel piano ad esso perpendicolare. B avrà lo stesso valore in tutti i punti della circonferenza, per cui il teorema di Ampère si può scrivere

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i_c \; .$$



Caso a) Caso b) Caso c)

a) i_c=0 => $B(r_1)$=0

b) La corrente i è distribuita uniformemente su una sezione $\pi(b^2$-$a^2)$; ciò dà una densità di corrente

$$j = \frac{i}{\pi(b^2 - a^2)}$$

La corrente totale concatenata con la circonferenza Γ è allora

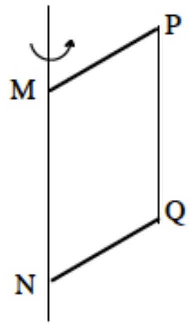
$$i_c = j(\pi r^2 - \pi a^2) = \frac{i}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(r^2 - a^2) = i\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

da cui $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$; in particolare $B(r_2) = 5{,}6 \cdot 10^{-5} \; T$

c) Qui la corrente concatenata con Γ è l'intera corrente i e perciò $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i$

da cui $B(r_3) = 6{,}7 \cdot 10^{-5} \; T$

Una spira conduttrice rettangolare, di lati MN = PQ = a = 20 cm e MP = NQ= h = 10 cm, costituita da filo omogeneo di sezione costante S = 1 mm^2 e resistività $\rho = 10^{-3}$ Ωm, ruota attorno al suo lato MN con velocità angolare ω = 157 rad/s. Nella zona della spira è presente un campo di induzione magnetica uniforme e costante nel tempo, di modulo B = 0,5 T, perpendicolare all'asse di rotazione della spira. Se all'istante iniziale il piano della spira è perpendicolare a B, calcolare:



a) in quale istante la f.e.m. indotta raggiunge per la prima volta il suo valore massimo;
b) il valore massimo della corrente indotta;
c) il valore massimo della d.d.p. fra i punti P e Q della spira.

SOLUZIONE:

Secondo la legge di Faraday-Neumann, la f.e.m. indotta nella spira durante la sua rotazione è, a parte il segno, pari alla derivata del flusso magnetico concatenato con la spira. Il valore massimo della f.e.m si ha dunque non quando è massimo il flusso, ma quando è massima la sua derivata.

$f.e.m. = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot\hat{n}dS = -\frac{d}{dt}Bah\cos\omega t = Bah\omega\sin\omega t$; il valore massimo viene raggiunto per la prima volta quando $\omega t = \frac{\pi}{2}$ cioè all'istante $t^* = 10$ ms

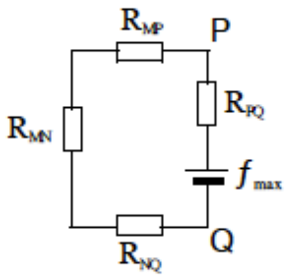
In quell'istante la f.e.m. assume il valore $f_{max} = Bah\omega$.

Quando la f.e.m. è massima, anche la corrente che circola nella spira è massima: $i_{max} = \frac{f_{max}}{R}$.

dove la resistenza R della spira, si determina dalla seconda legge di Ohm: $R = \rho\frac{2(a+h)}{S} = 600\ \Omega$

Ne segue $i_{max} = \frac{f_{max}}{R} = \frac{Bah\omega}{R} = 2.62\cdot 10^{-3}$ A

La f.e.m. si sviluppa tutta sul ramo PQ della spira. Infatti, MP e NQ sono paralleli alle linee di forza magnetiche e il ramo MN è fermo. Il sistema è dunque equivalente al circuito elettrico nella figura qui a lato.

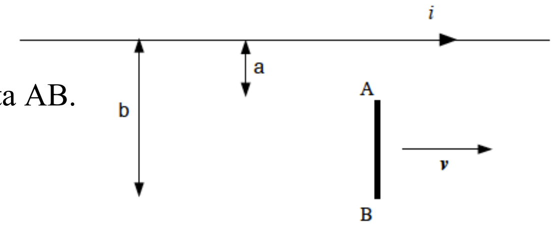


Si ha subito

$$\Delta V_{PQ} = f_{max} - iR_{PQ} = Bah\omega - \frac{Bah\omega}{R}R_{PQ} = 1{,}05\ \text{V}$$

Ovviamente, $R_{PQ} = \rho\frac{a}{S}$.

Un filo rettilineo indefinito porta una corrente i = 10 A. Una sbarretta metallica AB, posta perpendicolarmente al filo, si muove parallelamente ad esso con velocità costante v = 10 m/s.
[a = 1,0 cm ; b = 10 cm]



a) Calcolare la differenza di potenziale ai capi della sbarretta AB.
b) Dire quale tra V_A e V_B è maggiore e spiegarne la ragione.

SOLUZIONE:

Conviene dapprima osservare che la sbarretta si muove in un campo magnetico NON uniforme:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}$$ nei punti a distanza x dal filo.

La forza elettromotrice che si stabilisce fra gli estremi della sbarretta è la tipica f.e.m. di movimento. Occorrerà però tenere presente che ogni singolo elementino dx della sbarretta si verrà a trovare in un campo B diverso, e ciò appunto perché il campo dipende dalla distanza dal filo.
È quindi conveniente calcolare la forza elettromotrice infinitesima che si stabilisce ai capi di questi elementini e in seguito sommare il tutto per ottenere la f.e.m. totale.

Traducendo in formule quanto detto, si ha

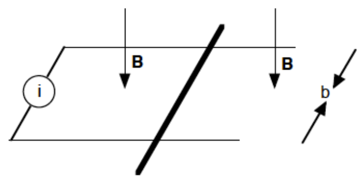
$$dF_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B(x)v \;\; dx = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}v \;\; dx$$

e quindi

$$F_{em} = \int_{sbarretta} dF_{em} = -\int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}v \;\; dx = -\frac{\mu_0}{2\pi} iv \ln\frac{b}{a}$$

La f.e.m. che si stabilisce vale allora $4{,}6\cdot 10^{-5}$ V e il punto A si viene a trovare a un potenziale superiore a B a causa di quel segno - che compare nella formula finale (legge di Lenz).
Si può spiegare il fatto che $V_A > V_B$ (cioè che cariche positive passano da B ad A) anche ricordando che la f.e.m. indotta deve essere tale da opporsi alla causa che l'ha prodotta. Qui la causa è il movimento della sbarretta verso destra: le cariche che passano da B ad A fanno sì che la sbarretta subisca una forza diretta verso sinistra.

Una sbarretta conduttrice, di massa m = 10 g e resistenza elettrica R = 10 Ω, è posta sopra due guide metalliche parallele distanti b = 5 cm, chiuse ad un'estremità su un generatore di corrente costante i = 0,1 A. Il circuito è immerso in un campo magnetico, uniforme e costante, di modulo B = 0,4 T. A un certo istante la sbarretta è lasciata libera di muoversi. Calcolare:



a) il lavoro compiuto dal campo dopo che la sbarretta ha percorso un tratto x = 2 cm;
b) la potenza erogata dal generatore in funzione del tempo.

SOLUZIONE:

Il generatore mantiene una corrente costante. Di conseguenza la sbarretta risente, secondo la legge di Laplace, di una forza pure costante

$$F = ibB$$

Quando la sbarretta ha percorso un tratto x, su di essa è stato quindi compiuto un lavoro

$$L = Fx = ibBx = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\, J$$

che si ritrova sotto forma di energia cinetica.

Notiamo a questo punto che essendo la forza agente costante, la sbarretta si muoverà di moto uniformemente accelerato.
Per la potenza spesa sulla sbarretta si può allora scrivere

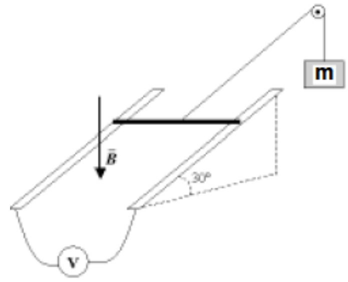
$$P_s = Fv = ibBv = ibBat = \frac{i^2 b^2 B^2}{m} t$$

Questa però non rappresenta l'intera potenza erogata dal generatore. Questo infatti, oltre a contrastare la forza elettromotrice indotta che si oppone al passaggio della corrente, deve anche fornire la potenza dissipata in effetto Joule.

In conclusione

$$P = Ri^2 + P_s = i^2\left[R + \frac{b^2 B^2}{m} t\right] = 0{,}1 + 4{,}0 \cdot 10^{-4}\, t \;\; W$$

Una barretta metallica di lunghezza l = 20 cm e massa trascurabile può scorrere senza attrito lungo due guide inclinate di un angolo di 30º, distanti l tra loro. Tutto il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme B = 0,8 T orientato secondo la verticale. Le due guide sono connesse inizialmente a un generatore di tensione V. La resistenza delle guide è trascurabile e quella della barretta vale R = 2 Ω. Alla barretta è applicato tramite un sistema di carrucole un peso di massa m = 5 g



a) Calcolare il valore della tensione V e il verso della corrente perché la barretta sia ferma.
b) Se a un certo istante il generatore viene sostituito da un corto circuito e la barretta comincia a muoversi, com'è diretta la corrente indotta e quanto vale in funzione della velocità della barretta?

SOLUZIONE:

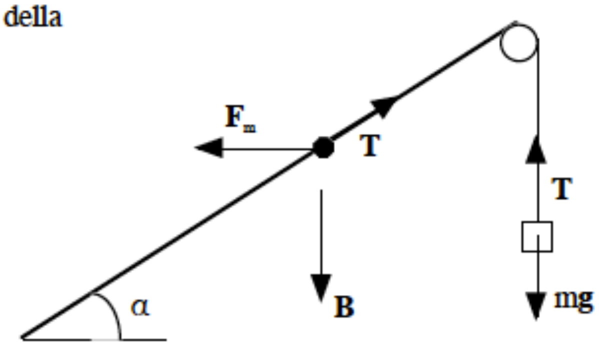
Le forze agenti sull'asticciola, che è perpendicolare al piano della figura, sono quelle mostrate, essendo T la tensione della fune e F_m la forza magnetica.

E' allora evidente che la condizione di equilibrio della barretta è

$$T = mg = F_m \cos\alpha = \left|i\vec{l} \wedge \vec{B}\right| \cos\alpha = ilB\cos\alpha$$

essendo i vettori $\boldsymbol{B}$ ed $\boldsymbol{l}$ perpendicolari tra loro.
Ne segue

$$i = \frac{mg}{lB\cos\alpha} \quad \text{e} \quad V = Ri = \frac{mgR}{lB\cos\alpha} = 0{,}7\text{V}$$



Per avere una forza magnetica diretta come in figura, occorre poi che la corrente entri nel foglio.

Per quanto riguarda la seconda parte del problema, basta osservare che se la barretta scende con velocità v, il flusso tagliato nel tempo dt durante il moto è semplicemente

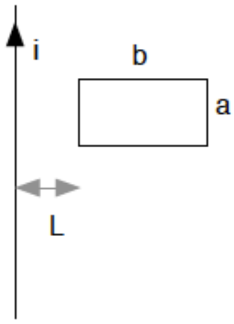
$$d\phi = Blvdt \cdot \cos\alpha$$

e pertanto la f.e.m. indotta risulta

$$-\frac{d\phi}{dt} = -Bvl \cdot \cos\alpha \quad \text{da cui} \quad i = -\frac{Bvl}{R}\cos\alpha$$

La corrente indotta ha verso entrante nel foglio, in quanto deve tendere a ridurre l'intensità del campo magnetico.

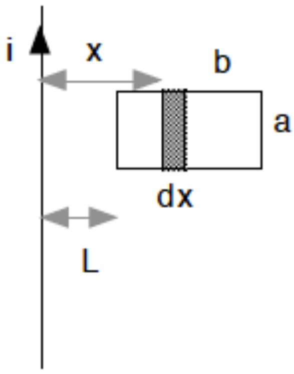
Una spira rettangolare di lati a e b si trova a distanza L da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente i. Se il circuito del filo viene interrotto e la corrente scende a zero in 0,02 secondi,
a) qual è la forza elettromotrice indotta nella spira?
b) Per la disposizione indicata in figura, in quale verso (orario o antiorario) circola la corrente indotta nella spira?
[Dati numerici: a = 10 cm; b = 20 cm; L = 5 cm; i = 10 A]



SOLUZIONE:

Il calcolo della forza elettromotrice indotta nella spira è una diretta applicazione della legge di Faraday-Neumann:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$



dove la seconda uguaglianza è praticamente imposta dal testo: non conosciamo le modalità con cui la corrente si riduce a zero, ma solo che si annulla in un tempo 0,02 s. Calcoleremo quindi la f.e.m. indotta come rapporto tra la variazione di flusso (cioè il flusso iniziale, dato che quello finale è a sua volta nullo) e il tempo, tenendo presente che il valore così ottenuto è a rigore un valore medio calcolato sugli 0,02 s.

Il calcolo del flusso richiede un minimo di attenzione. Il tipico errore è quello di considerare un valore del campo *B* (in un punto a scelta) e moltiplicarlo per l'area del rettangolo della spira. **Ciò è assolutamente errato.**
Il campo *B* non è costante in modulo all'interno della spira, ma dipende dalla distanza dal filo. Occorre allora procedere per gradi.

Se consideriamo un rettangolino infinitesimo (come quello tratteggiato in figura, di base *dx* e altezza *a*) si può ritenere che il campo *B* sia costante al suo interno e quindi il suo flusso concatenato col rettangolino è semplicemente dato dal valore di *B* moltiplicato per l'area del rettangolino. Il flusso totale concatenato con la spira è poi dato dalla somma di tutti i flussi infinitesimi concatenati con gli infiniti rettangolini in cui la spira si può considerare suddivisa.

Traducendo in formule

$$d\phi = B(x)\cdot a\cdot dx = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}a\ dx \quad \text{(flusso concatenato con rettangolino a distanza } x \text{ dal filo)}$$

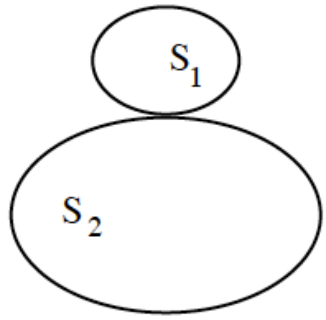
$$\Phi = \int_L^{L+b} d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi}ia\int_L^{L+b}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi}ia\ \ln x\Big|_L^{L+b} = \frac{\mu_0}{2\pi}ia\ \ln\frac{L+b}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}ia\ \ln 5 \quad \text{(flusso attraverso la spira)}$$

Ne segue

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi}{0{,}02} = 1{,}6\cdot 10^{-5} V$$

Ricordiamo ora che la f.e.m. che si genera deve essere tale da opporsi alla causa che l'ha prodotta, cioè la diminuzione della corrente nel filo, ossia la diminuzione del campo magnetico nei punti della spira.
Osserviamo anche che nella situazione della figura il campo *B* che sta diminuendo entra nel foglio: occorre quindi che la f.e.m. crei un campo magnetico <u>entrante</u> nel foglio in modo da compensare la diminuzione di *B*. Ciò comporta che la corrente indotta nella spira deve circolare in verso <u>orario</u> (sempre naturalmente riferendosi disposizione geometrica raffigurata).

Un circuito chiuso avente resistenza R è costituito da un filo conduttore rivestito di materiale isolante, piegato a forma di 8. Le due superfici delimitate dal filo hanno aree S_1 e S_2. Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme, perpendicolare al suo piano e variabile nel tempo con legge lineare $B = k\,t$



Calcolare:

a) la forza elettromotrice indotta nel circuito;

b) la potenza dissipata nel circuito.

[Dati numerici: $R = 0{,}4\ \Omega$; $S_1 = 120\ cm^2$; $S_2 = 200\ cm^2$; $k = 40\ T/s$]

SOLUZIONE:

Nei due tratti che delimitano S_1 e S_2 il verso della corrente indotta è opposto: le due normali $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ sono antiparallele. Abbiamo una certa libertà di scelta, in quanto il testo non dice nulla sul verso di **B**, ma solo che è perpendicolare al piano dell'8. Scegliamo allora $\mathbf{n}_2$ concorde con **B**.

$$\mathcal{E} = -\int\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}_2\,dS_2 - \int\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}_1\,dS_1 = -\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)S_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)S_1$$

e quindi

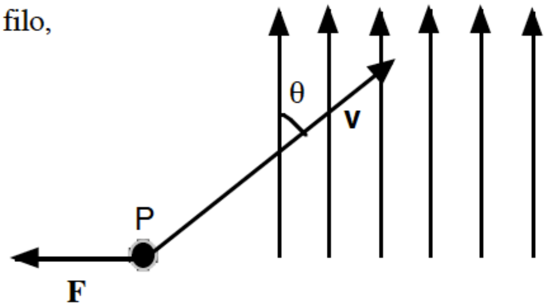
$$\mathcal{E} = k\,(S_1 - S_2) = -0{,}32\ V$$

La potenza dissipata è poi $P = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} = 0{,}26\ W$

Un filo rettilineo di lunghezza L si muove in un campo magnetico uniforme B, perpendicolare al filo, con una velocità v la cui direzione forma un angolo θ con le linee di forza del campo.
a) Calcolare la forza elettromotrice indotta nel filo.
b) Se gli estremi del filo sono collegati tra loro tramite un circuito di resistenza elettrica totale R, calcolare la potenza che è necessario spendere affinché il filo si muova con velocità costante.
[Dati numerici: L = 0,5 m; B = 0,6 T; v = 2,0 m/s; θ = 30º; R = 6,0 Ω]

SOLUZIONE:

La situazione è descritta in figura, dove P è la traccia del filo, perpendicolare al foglio.



La f.e.m. *f* che si genera nel filo è la tipica f.e.m. di movimento dovuta all'azione del campo ***B*** sulle cariche elettriche elementari presenti nel filo stesso.

Essa è data dalla nota (o, almeno, tale dovrebbe essere) espressione

$$f = \int_0^L \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = BLv\sin\vartheta = 0,3V$$

La potenza dissipata nel circuito esterno è

$$P = \frac{f^2}{R} = 0,015W$$

e questa deve anche essere la potenza spesa per mantenere il filo in moto con velocità costante.

E' possibile vedere le cose dal punto di vista seguente, leggermente diverso.
Quando il circuito è chiuso, nel filo passa una corrente $i = \frac{f}{R}$ e quindi il campo ***B*** esercita sul filo una forza $F = iLB$ diretta in modo da opporsi a ***v*** (vedere la figura).

La potenza spesa risulta allora

$$P = \frac{dL}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv\cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta) = Fv\sin\vartheta = iLB\sin\vartheta = \frac{f}{R}LB\sin\vartheta = \frac{f^2}{R}$$

Due conduttori cilindrici cavi coassiali, di raggi a e b, sono percorsi, in verso opposto, dalla stessa corrente i. Calcolare l'energia magnetica per unità di lunghezza.
[Dati numerici: a = 8 mm; b= 18 mm; i = 10 A]

SOLUZIONE:

Applicando il teorema di Ampère si ottiene:

a) nella zona esterna al conduttore di raggio maggiore $\oint B \cdot dl = \mu_0 (i_a + i_b)$

Essendo $i_a = -i_b$, l'integrale è nullo qualunque sia la curva scelta; ciò significa $B = 0$.

b) Nella zona compresa fra i due conduttori $\oint B \cdot dl = 2\pi r B = \mu_0 i_a$ e quindi $B = \dfrac{\mu_0 i_a}{2\pi r}$
[r = distanza dall'asse del cilindro]

c) Nella zona interna al conduttore interno si ha ancora $B = 0$, poiché non vi sono correnti.

In definitiva, il campo è non nullo solo nello spazio compreso fra i due conduttori.
La densità di energia magnetica è

$$w = \frac{B^2}{\mu_0}$$

E' importante rendersi conto che w NON è costante poiché B dipende da r. L'energia magnetica totale non è dunque calcolabile semplicemente moltiplicando la densità d'energia per il volume. E'necessario ricorrere al calcolo integrale, suddividendo lo spazio interno ai cilindri in volumetti infinitesimi dv, in ognuno dei quali sia contenuta un'energia magnetica

$$\mathrm{d}W = w \cdot \mathrm{d}v$$

e sommando poi su tutti i volumetti.
Come volumetti scegliamo i cilindri aventi come base le corone circolari di raggio compreso fra r e r+dr e altezza unitaria:

$$\mathrm{d}W = w \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 i_a^2}{4\pi r} \mathrm{d}r$$

Integrando su r da a a b si ha infine: $\displaystyle\int_a^b \frac{\mu_0 i_a^2}{4\pi r} \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 i_a^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = 8{,}1 \ \frac{\mu J}{m}$

Un solenoide è costituito da N=10.000 spire di raggio r=1 cm avvolte uniformemente attorno a un anello di raggio R=20 cm. Nel solenoide, di materiale superconduttore, è possibile far passare una corrente di 10^3 A. In queste condizioni,

a) quanto vale il campo magnetico all'interno del solenoide?

b) quanto vale l'energia magnetica immagazzinata nel solenoide?

c) Se la corrente viene fatta scendere bruscamente a metà del suo valore in un tempo pari a 1 ms, qual è la d.d.p. media che si stabilisce ai capi dell'avvolgimento del solenoide?

SOLUZIONE:

La lunghezza del solenoide è evidentemente $L = 2\pi R$, per cui il numero di spire per unità di lunghezza risulta

$$n = N/L$$

e il campo magnetico all'interno $B = \mu_0 n i = \mu_0 \dfrac{N}{2\pi R} i = 10\ T$

L'energia magnetica immagazzinata è data dal prodotto $W = w\ v$

dove: w = densità di energia = energia per unità di volume $= \dfrac{B^2}{2\mu_0}$;

v = volume dell'anello $= L \cdot S = 2\pi R \cdot \pi r^2$

e quindi $W = \dfrac{B^2}{2\mu_0} 2\pi R \cdot \pi r^2 = 1{,}57 \cdot 10^4\ J$

La legge di Faraday-Neumann fornisce la risposta all'ultima domanda:

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta B \cdot S}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} S \frac{\Delta i}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} \pi r^2 \frac{i}{2\Delta t} = 1{,}57\ V$$

I parametri di un circuito RL serie sono $\varepsilon = 6$ V; R = 20 Ω; L = 0,4 H. All'istante in cui la corrente nel circuito assume il valore $i_0 = 0{,}2$ A, calcolare:
a) la potenza che viene impiegata nella creazione del campo magnetico della bobina;
b) l'energia immagazzinata nel campo;
c) l'energia dissipata in calore fino a quel momento.

SOLUZIONE:

In un circuito del tipo proposto, in ogni istante la potenza fornita dal generatore ($P=Ei$) in parte si disperde sulla resistenza, in parte va a costruire il campo magnetico all'interno dell'induttanza.
Il bilancio energetico si scrive

$$Ei = Ri^2 + P_M.$$

Ne segue

$$P_M = Ei - Ri^2 = (E - Ri)\cdot i = 0{,}4W$$

L'energia totale presente nel campo magnetico non dipende dalla storia passata, ma solo dal valore della corrente all'istante considerato ed è data dalla nota espressione

$$U_M = \frac{1}{2}Li^2$$

che nel nostro caso vale $U_M = 8{,}0\cdot 10^{-3}J$.

La difficoltà insita nella terza domanda sta nel fatto che la corrente nel circuito non è costante, ma varia col tempo secondo la legge

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

[Osserviamo, di passaggio, che il valore $i_0 = 0{,}2\,A$ si ha al tempo $t_1 = 2{,}2\cdot 10^{-2}\,s$]

Quando la resistenza R è percorsa da una corrente i, si dissipa per effetto Joule una potenza Ri^2; ciò equivale a dire che in un tempo dt viene persa un'energia

$$dW = Ri^2\,dt$$

Si tratterà allora di sommare tutte queste energie perse dalla chiusura del circuito (tempo $t=0$) all'istante $t=t_1$ (in cui la corrente vale i_0)

$$W = \int_0^{t_1} i(t)^2 R\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{t_1}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 dt = 7{,}5\cdot 10^{-3}J$$