

Numero di soluzioni reali di $a^x = x$

gabo

Lo scopo di questo documento è quello di discutere il numero e le soluzioni di $a^x = x$ come intersezioni di curve nel piano cartesiano al variare del parametro a . Si considerino le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ con $a \in (0, +\infty)$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Nel caso in cui $a = 1$, l'equazione è semplicemente riducibile a $x = a = 1$, quindi la soluzione è rappresentata dal punto $(1, 1)$. Se $a \in (0, 1)$ è semplice dimostrare che l'intersezione esiste ed è unica:

Dimostrazione 1.1

Si consideri la funzione $h(x) = f(x) - g(x) = a^x - x$, è banale dimostrare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, quindi esistono sicuramente dei numeri reali a e b per cui $f(a) < 0 < f(b)$, dal momento che $h(x)$ è continua, per il teorema di Bolzano esiste almeno un'ascissa x_0 in cui $h(x_0) = 0$ ossia in cui $f(x_0) - g(x_0) = 0 \implies f(x_0) = g(x_0)$. Se esiste almeno un altro numero reale $x_1 \neq x_0$ tale che $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, per il teorema di Lagrange esiste almeno un'ascissa $c : x_0 < c < x_1$ (oppure $x_1 < c < x_0$) tale che $h'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0}{x_1 - x_0} = 0$, quindi esiste almeno un punto in cui $h'(x) = 0$, tuttavia $f'(x) = a^x \ln(a)$, $\forall x \in \mathbb{R} (a^x \ln(a) < 0)$, dal momento che $0 < a < 1$, quindi $f'(x) < 0 \implies f'(x) - 1 < 0 \implies h'(x) < 0$, allora non è vero che esiste un c tale per cui $h'(x) = 0$, pertanto non esiste neanche un $x_1 \neq x_0$ per cui $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, allora x_0 è l'unica soluzione reale all'equazione $a^x = x$ nel caso considerato e si trova nel primo quadrante.

Nel caso in cui $a = e^{\frac{1}{e}}$, $f(x)$ è tangente a $g(x)$, ciò è facile da dimostrare:

Dimostrazione 1.2

$$\begin{aligned} a^x = x &\implies f'(x) = g'(x) \implies a^x \ln(a) = 1 \implies a^x = \frac{1}{\ln(a)}, \text{ ma} \\ a^x = x, \text{ quindi } x &= \frac{1}{\ln(a)}, \text{ segue che } a^{\frac{1}{\ln(a)}} = \frac{1}{\ln(a)} \implies \frac{1}{\ln(a)} \ln(a) = \\ \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right) &\implies \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right) = 1 \implies \frac{1}{\ln(a)} = e \implies \ln(a) = \frac{1}{e} \implies a = \\ &e^{\frac{1}{e}}. \end{aligned}$$

Corollario_{1.2}

Da ciò segue che esiste solo una soluzione in questo caso e che $a > e^{\frac{1}{e}} \implies a^x > e^{\frac{x}{e}} \geq x \implies a^x > x$ per $x > 0$, per $x < 0$ non esistono soluzioni perché $f(x)$ è positiva, mentre $g(x)$ è negativa, quindi non esistono soluzioni se $a > e^{\frac{1}{e}}$.

Resta da discutere il numero di soluzioni per $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. Si può dimostrare che in questo caso vi sono due soluzioni distinte all'equazione $a^x = x$:

Dimostrazione 1.3

Considerando nuovamente $h(x) = f(x) - g(x)$, è immediato osservare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, allora esiste sicuramente una coppia di valori (x_0, x_1) , tali che $h(x_0) = h(x_1)$, per il teorema di Rolle è garantita l'esistenza di un'ascissa $c \in (x_0, x_1)$, per cui $h'(c) = 0$. Se $h(c) < 0$, per il teorema di Bolzano, esistono due zeri di $h(x)$ entro l'intervallo (x_0, x_1) , quindi due valori per cui $f(x) = g(x)$. Garantita l'esistenza di c dal teorema di Rolle, è possibile porre $h'(c) = 0$ e ricavare che $c = -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} = \log_a(\ln(a))$, quindi il punto di minimo di $h(x)$ avrà ordinata $r(a) = a^{\log_a(\ln(a))} + \frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$. La derivata dell'ordinata del punto di minimo rispetto ad a è $\frac{1}{a} \left(1 + \frac{1 - \ln(\ln(a))}{\ln^2(a)}\right)$, che è sempre positiva dato che $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ e che $\ln(\ln(a))$ è a sua volta crescente e assume valore massimo

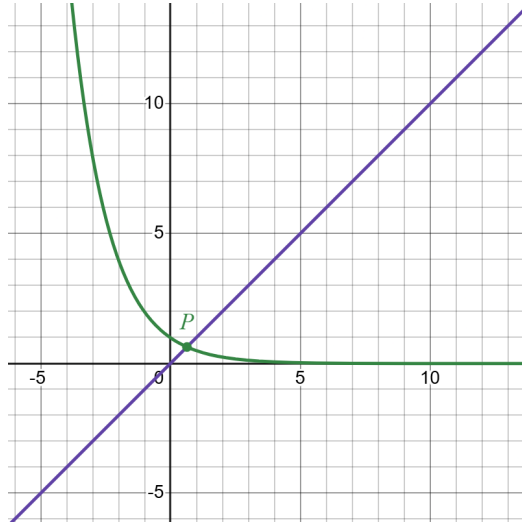
minore di $\ln(\ln(e^{\frac{1}{e}})) = -1$, quindi $-\ln(\ln(a)) > 1$. Calcolando l'ordinata del punto di minimo nell'estremo per $a = e^{\frac{1}{e}}$ si trova che l'ordinata del punto minimo è superiormente limitata da $r(e^{\frac{1}{e}}) = 0$. L'ordinata del punto di minimo è sempre negativa per $a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$, dunque per il teorema di Bolzano, la funzione $h(x)$ presenta due zeri nel caso in cui $a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$, uno in (x_0, c) , e l'altro in (c, x_1) , la tesi è così dimostrata.

Conclusione

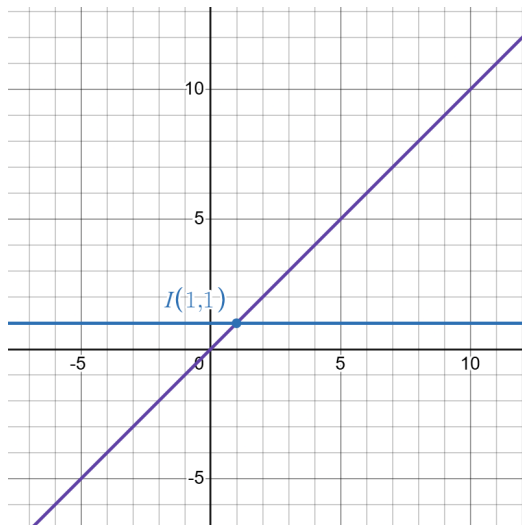
Si distinguono tre casi per la risolvibilità dell'equazione $a^x = x$ con $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$:

1. $a \in (0, 1)$, in cui $a^x = x$ ha una sola soluzione reale;
2. $a = 1$, anche in questo caso esiste una sola soluzione reale $x = 1$;
3. $a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$, in questo intervallo esistono due soluzioni reali distinte
4. $a = e^{\frac{1}{e}}$, in questo caso particolare l'unica soluzione è per $x = e$;
5. $a \in (e^{\frac{1}{e}}, \infty)$ non esistono soluzioni reali.

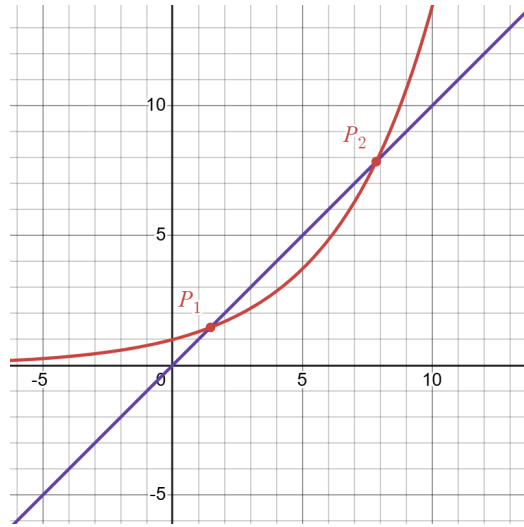
Grafici



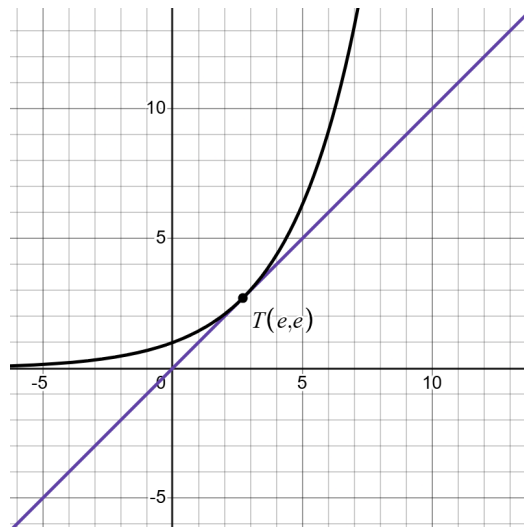
in verde $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, in viola $y = x$



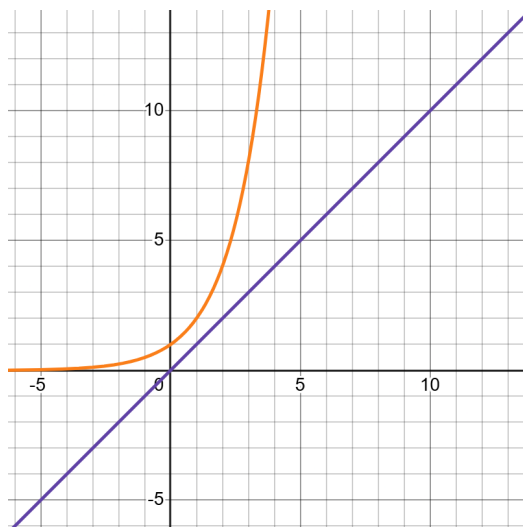
in viola $y = x$, in blu $y = 1$



in rosso $y = 1.3^x$, in viola $y = x$



in nero $y = (\sqrt{e})^x$, in viola $y = x$



in arancione $y = 2^x$, in viola $y = x$