SNS Matematica 2023 Es. 2

Problema:

Se a è un parametro reale positivo, calcolate il numero $N(a)$ di soluzioni in x all'equazione
$\sin(a(\sin x + \cos^2 x)) = 0$
con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Soluzione:

$\sin(a(\sin x + \cos^2 x)) = 0$ è equivalente a $a(\sin x + 1 - \sin^2 x) = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Possiamo ridurre l'equazione a $a \sin^2 x - a \sin x - a + \pi k = 0$. Da cui si ottiene che:

$$\sin x = \frac{a \pm \sqrt{5a^2 - 4a\pi k}}{2a} \text{ se } 5a^2 - 4a\pi k \geq 0.$$

Fissato k, la somma delle due soluzioni (s_1, s_2) è $s_1 + s_2 = -\dfrac{-a}{a} = 1$. Allora il prodotto è $p = s_1(1 - s_1)$ che è positivo se $0 \leq s_1 \leq 1$ (è necessario che $s_1 = \sin x \geq 0$, altrimenti x non sarebbe nel primo quadrante). Se allora esiste un $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che $s_1 = \sin x$, le soluzioni sono concordi e di somma positiva, quindi sono entrambe positive. Si può calcolare facilmente che ciò avviene per $k \geq \frac{a}{\pi}$ ponendo $\dfrac{a + \sqrt{5a^2 - 4a\pi k}}{2a} \leq 1$ (dato che a è positivo, la soluzione "positiva" è maggiore di quella negativa, e dato che $s_2 = 1 - s_1$, si avrà che $s_1 \leq 1 \implies 1 - s_1 = s_2 \geq 0$, con $s_2 \leq s_1$, definitivamente $0 \leq s_2 \leq s_1 \leq 1$). Se il discriminante è maggiore di 0, si avranno due soluzioni distinte. Dato che in questo caso si ha che $\frac{a}{\pi} \leq k < \frac{5}{4\pi} a$. Finalmente si arriva alla conclusione, il numero $N(a)$ di soluzioni all'equazione iniziale è:

$$N(a) = 2 \left(\left\lfloor \frac{5}{4\pi} a \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{\pi} \right\rceil + 1 \right)$$

(una negativa e una positiva per ogni k appartenente all'intervallo considerato). Se il discriminante è uguale a 0 (per $k = \frac{5a}{4\pi}$), si ottengono due soluzioni con molteplicità. Volendo correggere questa inconvenienza, basta fare attenzione ai casi in cui $a = \frac{4}{5}\pi n$, con $n \in \mathbb{N}$, in quel caso esiste un solo valore di k che annulla il determinante nell'intervallo considerato, banalmente $k = n$, quindi basta sottrarre una soluzione. Per i pedanti:

$$N(a) = \begin{cases} 2 \left(\left\lfloor \dfrac{5}{4\pi} a \right\rfloor - \left\lceil \dfrac{a}{\pi} \right\rceil + 1 \right) \text{ se } a \neq 4\pi n \\ \\ 2 \left(\left\lfloor \dfrac{5}{4\pi} a \right\rfloor - \left\lceil \dfrac{a}{\pi} \right\rceil \right) + 1 \text{ se } a = 4\pi n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$