Verifica di Matematica

Nome: ____________________ Classe: ____________ Data: ____________

Ogni risposta deve essere giustificata. Qualora mancasse la giustificazione, l'esercizio verrà considerato non valido (0pt) a prescindere dal risultato ottenuto.

Livello	N.	Esercizio	Punti
I	1	Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni nei loro domini di definizione: i. $f_1(x) = e^{\sin x}\cos x + x^3 + 23$; ii. $f_2(x) = x^x + \cos(\sqrt{x}) + \frac{\sin x}{\cos x} + 2\sqrt{x} + 5$; iii. $f_3(x) = e^{x^2} + 2\cos(\sin x) + 73$.	$\dots/4$pt
	2	Si calcoli la derivata di una delle seguenti funzioni in $\mathbb{R}$ mediante la definizione: i. $g_1(x) = x^2$; ii. $g_2(x) = \sin x$; iii. $g_3(x) = 1$.	$\dots/3$pt
	3	Si individui l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $\gamma : y = 2x^2 + 3$ nel punto $(1, 5)$.	$\dots/4$pt
	4	Svolgere una delle seguenti consegne: i. Si dimostri la proprietà di linearità della derivata; ii. Si spieghi il significato geometrico della derivata; iii. Sia $f(x) = 1 + x^2 + x^3$, individuare e classificare i punti stazionari e di flesso nel dominio massimale di definizione; iv. Dire se la funzione $h(x) = x^2 + 3$ soddisfa le condizioni del teorema di Rolle nel compatto $[-n, n] \subset \mathbb{R}$, ove $n \in \mathbb{N}$.	$\dots/5$pt
II	1	Tra tutti i rettangoli di dato perimetro $2p$, determinare quello con diagonale minima.	$\dots/6$pt
	2	Il calcolo della derivata parziale di una funzione rispetto a una variabile si svolge considerando costanti le variabili non interessate dall'operatore. Calcolare le derivate parizali rispetto y e rispetto z della seguente funzione: $g(x, y, z) = e^{xy^2} + 3y + \sin(xy) + 2x + 2zy^2x + e^{zx}$. *Esempio:* $\frac{\partial}{\partial y}(x^5y + 2y) = x^5 + 2$.	$\dots/5$pt
III	1	**Funzione lipschitziana**. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana se esiste una costante $\lambda \geq 0$ tale che $\lvert f(x_2) - f(x_1)\rvert \leq \lambda \lvert x_2 - x_1\rvert$ per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in A$. i. Dimostrare che la funzione $f(x) = \sin x$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$ e determinare la costante di Lipschitz; ii. *Bonus: considerando il valore assoluto come una distanza, che significato geometrico presenta la lipschitzianità?* *Suggerimento: si utilizzi il Teorema di Lagrange.*	$\dots/10$pt
Jolly	1	**Teorema di Banach-Caccioppoli sulle contrazioni.** Sia (X, d) uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $T : X \to X$ una contrazione su X, ossia un'applicazione lipschitiziana con costante di Lipschitz $\lambda \in [0, 1)$. Allora la mappa T ammette uno e un solo punto fisso: $x^\star = T(x^\star)$, $x^\star \in X$. Data $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di mappa $x = (x_1, x_2) \mapsto (\alpha x_1 + v_1, \beta x_2 + v_2)$, con $\alpha, \beta \in [0, 1)$, verificare che questa è una contrazione in $(\mathbb{R}^2, \lvert\cdot\rvert)$ e se ne calcoli il punto fisso.	$\dots/15$pt

Il questionario è stato scritto e condiviso da RebC - SOS Matematica.

Voto:	4,5	5	6	7	8	9	10	10L
Punteggio:	<5 pt	5 pt	6 pt	10 pt	12 pt	14 pt	18 pt	>18 pt

Buon lavoro!