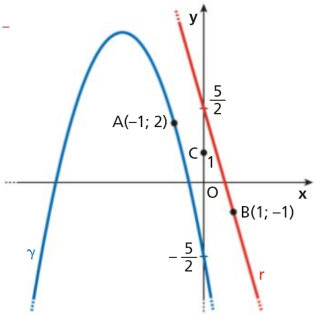
69



a. Determina l'equazione della parabola γ, sapendo che la tangente in A è parallela alla retta r.

b. Determina l'espressione della funzione polinomiale di quarto grado $f(x)$ il cui grafico è tangente a γ in A e alla retta r in B, e passa per il punto C.

c. Sia $g(x) = f''(x)$. Determina se esistono delle rette tangenti al grafico di g parallele alla tangente a γ nel suo punto di ascissa -2.

[a) $y = -x^2 - \frac{11}{2}x - \frac{5}{2}$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$]

a. LA RETTA r PASSA PER $B(1;-1)$ E PER IL PUNTO $P(0; 5/2)$

DETERMINIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE:

$$m_r = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{\frac{5}{2} - (-1)}{0-1} = \frac{\frac{5}{2} + 1}{-1} = \frac{\frac{5+2}{2}}{-1} = -\frac{7}{2}$$

LA RETTA PARALLELA ALLA RETTA r AVRÀ:

$$m_t = m_r = -\frac{7}{2}$$

DETERMINIAMO LA RETTA TANGENTE NEL PUNTO A:

$$y - y_A = m_t(x - x_A)$$

$$y - 2 = -\frac{7}{2}(x+1) \rightarrow y = -\frac{7}{2}x - \frac{7}{2} + 2 \rightarrow$$

$$y = -\frac{7}{2}x + \frac{-7+4}{2} = -\frac{7}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow t: y = -\frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$$

IMPONIAMO ALLA PARABOLA DI EQUAZIONE

$$y = ax^2 + bx + c$$

IL PASSAGGIO PER I PUNTI A E $D\left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = b - c + 2 \\ c = -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = b + \frac{5}{2} + 2 \\ c = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = b + \frac{9}{2} \\ c = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

L'EQUAZIONE DIVENTA: $y = \left(b + \frac{9}{2}\right)x^2 + bx - \frac{5}{2}$;

OCCORRE DETERMINARE b.

IMPONIAMO CHE LA RETTA t SIA TANGENTE ALLA PARABOLA

$$\begin{cases} y = \left(b + \frac{9}{2}\right)x^2 + bx - \frac{5}{2} \\ y = -\frac{7}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left(b + \frac{9}{2}\right)x^2 + bx - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\left(b + \frac{9}{2}\right)x^2 + bx + \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(b + \frac{9}{2}\right)x^2 + \left(b + \frac{7}{2}\right)x - 1 = 0$$

IMPONIAMO LA CONDIZIONE DI TANGENZA ($\Delta = 0$):

$$\Delta = \left(b+\frac{7}{2}\right)^2 - 4\left(b+\frac{9}{2}\right)(-1) = 0$$

$$b^2+7b+\frac{49}{4}+4\left(b+\frac{9}{2}\right)=0$$

$$b^2+7b+\frac{49}{4}+4b+\frac{36}{2}=0$$

$$b^2+11b+\frac{49+72}{4}=0 \rightarrow b^2+11b+\frac{121}{4}=0$$

$$\left(b+\frac{11}{2}\right)^2=0 \rightarrow b+\frac{11}{2}=0 \rightarrow b=-\frac{11}{2}$$

QUINDI

$$y=\left(-\frac{11}{2}+\frac{9}{2}\right)x^2-\frac{11}{2}x-\frac{5}{2}$$

$$\gamma: \; y=-x^2-\frac{11}{2}x-\frac{5}{2}$$

b. LA FUNZIONE POLINOMIALE HA EQUAZIONE GENERALE:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

CALCOLO LA DERIVATA:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

CONSIDERIAMO LE VARIE CONDIZIONI:

- PASSAGGIO PER $C(0;1)$

$$a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e = 1$$
$$e = 1$$

- PASSAGGIO PER A

$$a(-1)^4 + b\cdot(-1)^3 + c\cdot(-1)^2 + d\cdot(-1) + e = 2$$
$$a - b + c - d + e = 2$$

- PASSAGGIO PER B

$$a(1)^4 + b(1)^3 + c\cdot(1)^2 + d\cdot 1 + e = -1$$
$$a + b + c + d + e = -1$$

- TANGENTE A γ IN A

$$f'(-1) = \gamma'(-1)$$

$$\gamma' = -2x - \frac{11}{2} \rightarrow \gamma'(-1) = 2 - \frac{11}{2} = \frac{4-11}{2} = -\frac{7}{2}$$

QUINDI

$$4a(-1)^3+3b(-1)^2+2c(-1)+d=-\frac{7}{2}$$

$$-4a+3b-2c+d=-\frac{7}{2}$$

- TANGENTE ALLA RETTA r IN B:

$$f'(1)=m_2$$

$$4a(1)^3+3b(1)^2+2c(1)+d=-\frac{7}{2}$$

$$4a+3b+2c+d=-\frac{7}{2}$$

IMPOSTIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} e=1 \\ a-b+c-d+e=2 \\ a+b+c+d+e=-1 \\ -4a+3b-2c+d=-7/2 \\ 4a+3b+2c+d=-7/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b+c-d=1 & [1] \\ a+b+c+d=-2 & [2] \\ -4a+3b-2c+d=-7/2 & [3] \\ 4a+3b+2c+d=-7/2 & [4] \\ e=1 \end{cases}$$

SOMMANDO LA [1] E LA [2]

$$a-\cancel{b}+c-\cancel{d}+a+\cancel{b}+c+\cancel{d}=1-2$$

$$2a+2c=-1 \rightarrow a+c=-1/2 \qquad [5]$$

SOTTRAENDO LA [4] ALLA [3]

$$4a+\cancel{3b}+2c+\cancel{d}+4a-\cancel{3b}+2c-\cancel{d}=-7/2+7/2$$

$$8a+4c=0 \rightarrow 2a+c=0 \rightarrow c=-2a \qquad [6]$$

SOSTITUENDO LA [6] NELLA [5], SI HA:

$$a - 2a = -\frac{1}{2}$$

$$-a = -\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

E $\quad c = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

SOSTITUENDO NELLA [2], SI HA

$$\frac{1}{2} + b - 1 + d = -2$$

$$b + d = -2 - \frac{1}{2} + 1 \rightarrow b + d = \frac{-4 - 1 + 2}{2} \rightarrow b + d = -\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow b = -\frac{3}{2} - d$$

SOSTITUENDO TUTTO NELLA [4], SI HA:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(-\frac{3}{2} - d\right) - 2 + d = -\frac{7}{2}$$

$$2 - \frac{9}{2} - 3d - 2 + d = -\frac{7}{2}$$

$$-2d = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} \rightarrow -2d = \frac{2}{2} \rightarrow -2d = 1$$

$$\rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

E

$$b = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

QUINDI

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = -\frac{1}{2} \\ e = 1 \end{cases}$$

LA FUNZIONE POLINOMIALE RISULTA

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

C. CALCOLO LE DERIVATE DELLA FUNZIONE $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 3x^2 - 2x - \frac{1}{2}$$

$$= 2x^3 - 3x^2 - 2x - \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 3 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 3x - 2 = 6x^2 - 6x - 2$$

DETERMINIAMO LA PENDENZA DELLA RETTA TANGENTE A γ NEL PUNTO DI ASCISSA -2.

$$\gamma' = -2x - \frac{11}{2}$$

$$\gamma'(-2) = -2 \cdot (-2) - \frac{11}{2} = 4 - \frac{11}{2} = -\frac{3}{2}$$

ABBIAMO CHE:

$$g(x) = f^{4}(x) - 6x^2 - 6x - 2$$

DETERMINIAMO I PUNTI DELLA FUNZIONE $g(x)$ DOVE LA DERIVATA ASSUME PENDENZA $m = -\frac{3}{2}$.

CALCOLIAMO $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 \cdot 6x - 6 = 12x - 6$$

IMPONIAMO CHE:

$$g'(x) = m \rightarrow 12x - 6 = -\frac{3}{2}$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE

$$12x = -\frac{3}{2} + 6$$

$$12x = \frac{-3+12}{2} \rightarrow 12x = \frac{9}{2} \rightarrow x = \frac{\cancel{9}^{\,3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{12}_{\,4}} = \frac{3}{8}$$

LA CUI SOLUZIONE È $x = \frac{3}{8}$,

ALLORA LE RETTE TANGENTI PARALLELE ESISTONO.