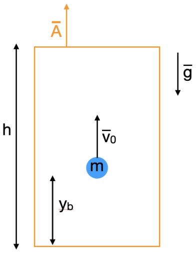
Primo Esonero di Fisica I - 02.12.2024

(A.A. 2024/25, S. Celli / F. Tria)

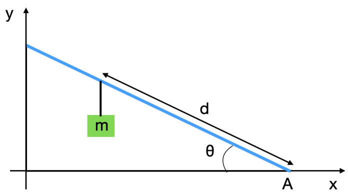
Esercizio 1

Un bambino si trova all'interno di un ascensore e lancia verticalmente una pallina di massa $m = 200$ g da un'altezza di $y_b = 75$ cm dal suolo. Sapendo che l'ascensore è alto $h = 2.50$ m, calcolare:
(i) quale deve essere la velocità minima da imprimere alla pallina affinchè essa tocchi il soffitto dell'ascensore quando quest'ultimo è fermo al piano;
(ii) quale deve essere la velocità minima da imprimere alla pallina affinchè essa tocchi il soffitto dell'ascensore quando quest'ultimo sale verso l'alto con accelerazione costante $\vec{A}$ di modulo 2 m/s^2.



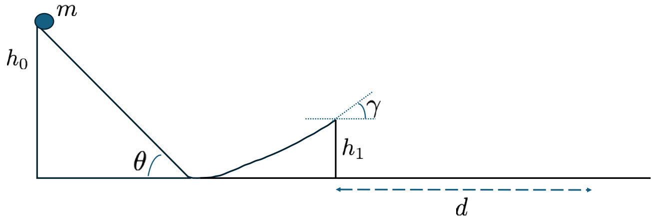
Esercizio 2

Una scala omogenea di massa $M = 2$ kg e lunghezza L viene poggiata su una parete verticale e sostenuta da un pavimento orizzontale scabro, con cui forma un angolo $\theta = 35°$. A distanza $d = 2L/3$ dal punto di appoggio col pavimento (punto A in figura) viene appeso un corpo di massa $m = 50$ g per mezzo di una fune ideale. Se il sistema è in equilibrio, calcolare:
(i) la forza d'attrito esercitata nel punto A;
(ii) la reazione normale del pavimento sempre nel punto A;
(iii) la reazione vincolare della parete.

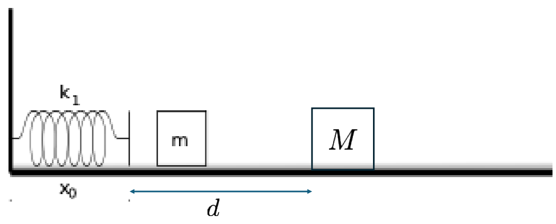


Esercizio 3

Un punto materiale di massa $m = 5\,kg$ inizialmente tenuto fermo ad un'altezza $h_0 = 5\,m$ su un piano inclinato di un angolo $\theta = \frac{\pi}{4}\,rad$ rispetto al piano orizzontale, viene lasciato libero ad un certo istante t_0. A valle del piano orizzontale è connessa in modo continuo una guida (vedi figura) che termina ad un'altezza $h_1 = 2\,m$ formando un angolo $\gamma = \frac{\pi}{6}\,rad$ con il piano orizzontale. Determinare a quale distanza orizzontale d dal punto di distacco dalla guida il punto materiale tocca il suolo. Si consideri il piano inclinato con coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente $\mu_s = 0.2$ e $\mu_d = 0.1$ e si trascuri l'attrito della guida.



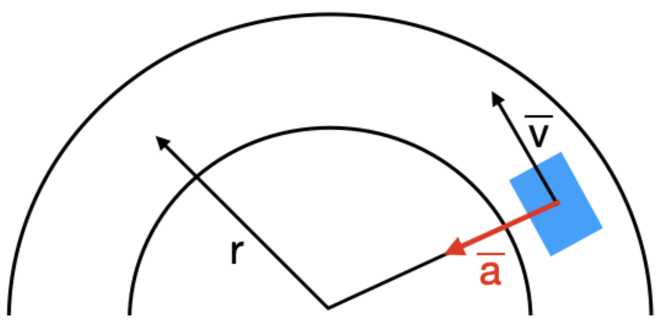
Esercizio 4
Si consideri il sistema riportato in figura, in cui una molla ideale con costante elastica $k_1 = 200$ N/m è posta all'estremità di una guida scabra con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.3$ e dinamico $\mu_k = 0.1$. La molla ha lunghezza a riposo $x_0 = 15\,\mathrm{cm}$.
Un punto materiale di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, stilizzato in figura da un quadrato, viene inizialmente posto a ridosso della parete di sinistra in modo che la molla sia compressa di tutta la sua lunghezza x_0. A distaza $d = 30\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di riposo della molla è fermo un altro punto materiale di massa $M = 3\,\mathrm{kg}$.



1. Verificare che la contrazione iniziale della molla sia sufficiente a vincere la forza di attrito statico, consentendo al punto materiale di massa m di muoversi.
2. Verificare che il punto materiale di massa m urta il punto materiale di massa M.
3. Considerando un urto completamente anelastico, calcolare a quale distanza dal punto in cui avviene l'urto i due punti materiali si fermano.
4. Calcolare l'energia dissipata dalla forza di attrito dinamico in tutto il processo e l'energia dissipata durante l'urto.

Esercizio 5
Un'automobile percorre una curva di raggio $r = 200$ m. La superficie della strada non è piana ma inclinata di un angolo $\theta = 20°$. Determinare:

1. per quale velocità v la macchina è in grado di percorrere la curva senza sbandare (verso il basso o verso l'alto) anche in assenza di attrito;
2. il modulo della reazione vincolare normale, sapendo che la massa della macchina è 1000 kg.



Soluzioni

Esercizio 1

Soluzione 1
Usando la conservazione dell'energia meccanica e ricordando che la velocità minima corrisponde a quella per cui il punto materiale arriva a velocità nulla sul soffitto, possiamo scrivere:

1. **Caso dell'ascensore fermo al piano**

$$mgh = mgy_b + \frac{1}{2}mv_{0,\min}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{0,\min} = \sqrt{2g(h-y_b)} \simeq 5.9\,\text{m/s}$$

2. **Caso dell'ascensore con accelerazione verso l'alto di modulo A**

Il secondo principio della dinamica si scrive

$$m\vec{g} = m\vec{a} = m(\vec{a'} + \vec{A})$$

dove abbiamo indicato con $\vec{a'}$ l'accelerazione nel sistema di riferimento non inerziale solidale con l'ascensore. Proiettando l'equazione vettoriale lungo l'asse $\hat{y}$, scelta come asse verticale rivolta verso l'alto, otteniamo:

$$m(-g-A) = ma' \quad \Rightarrow \quad a' = -(g+A)$$

Abbiamo ancora un moto uniformemente accelerato, questa volta con accelerazione a'. Riscrivendo l'analoga equazione per le conservazione dell'energia meccanica, otteniamo la soluzione:

$$v_{0,\min} = \sqrt{2(g+A)(h-y_b)} \simeq 6.4\,\text{m/s}$$

Soluzione 2

1. **Caso dell'ascensore fermo al piano**

Detto $\hat{y}$ l'asse su cui si sviluppa il moto, cominciamo a studiare il caso di acceleratore fermo. In tal caso, la velocità minima da imprimere alla pallina per toccare il soffitto è quella che consente alla pallina di arrivare in tale posizione con velocità nulla. Essa percorre lo spazio $h - y_g$ soggetta ad accelerazione $-g$, per cui dalle equazioni del moto uniformemente accelerato ricaviamo che

$$\begin{cases} h - y_b = v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_{0,y} - gt \end{cases}$$

Il tempo di arrivo della pallina al soffitto si trova dunque imponendo $v_y(t^*) = 0 \implies t^* = v_{0,y,min}/g$, che sostituito nella legge oraria fornisce

$$h - y_b = \frac{v_{0,y,min}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{0,y,min}^2}{g} \implies h - y_b = \frac{1}{2}\frac{v_{0,y,min}^2}{g} \implies v_{0,y,min} = \sqrt{2g(h-y_b)} = 5.9\,\text{m/s}$$

2. **Caso dell'ascensore con accelerazione verso l'alto di modulo A**

Nel caso in cui il moto dell'ascensore sia uniformemente accelerato, dobbiamo tener conto del moto relativo tra pallina e ascensore. Nel sistema di riferimento (non inerziale) solidale con l'ascensore, la pallina è soggetta ad accelerazione costante pari a

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} \implies \vec{a}' = -(g+A)\hat{y}$$

e dunque le sue equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} h - y_b = v'_{0,y} t - \frac{1}{2}(g + A)t^2 \\ v'_y(t) = v'_{0,y} - (g + A)t \end{cases}$$

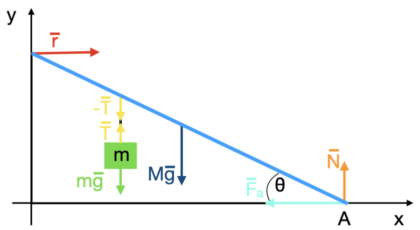
Imponendo $v'_y(t^{**}) = 0 \implies t^{**} = v'_{0,y,min}/(g + A)$, e pertanto ora

$$h - y_b = \frac{(v')^2_{0,y,min}}{g + A} - \frac{1}{2}\frac{(v')^2_{0,y,min}}{g + A} \implies h - y_b = \frac{1}{2}\frac{(v')^2_{0,y,min}}{g + A} \implies v'_{0,y,min} = \sqrt{2(g + A)(h - y_b)} = 6.4\,\mathrm{m/s}$$

Esercizio 2

Le forze esterne agenti sul sistema massa+scala sono rispettivamente:

- la reazione vincolare della parete $\vec{r}$, ortogonale ad essa in quanto liscia;
- la forza peso agente sulla scala $M\vec{g}$, applicata al proprio baricentro e diretta lungo la verticale;
- la forza peso agente sulla massa m, $m\vec{g}$, diretta lungo la verticale e trasferita alla scala per mezzo della tensione (che trattiamo dunque come una forza interna);
- la reazione normale del pavimento $\vec{N}$, espletata in A e diretta perpendicolarmente al pavimento;
- la forza d'attrito $\vec{F}_a$, anch'essa espletata in A e diretta parallelamente al pavimento.



Per avere equilibrio statico è necessario imporre nulli sia il risultante delle forze esterne applicate che il risultante dei loro momenti. Pertanto dovremo imporre che

$$\begin{cases} M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{r} + \vec{F}_a = \vec{0} \\ \vec{m}_A(M\vec{g}) + \vec{m}_A(m\vec{g}) + \vec{m}_A(\vec{r}) = \vec{0} \end{cases}$$

dove si è scelto come polo per il calcolo dei momenti il punto A, in modo da semplificare la trattazione. Detto xy il piano in cui giacciono le forze, i rispettivi momenti saranno diretti lungo $\hat{z}$. Dunque, proiettando le precedenti equazioni sugli assi cartesiani otteniamo

$$\begin{cases} r - F_a = 0 \\ -Mg - mg + N = 0 \\ Mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{2}{3}mgL\cos\theta - rL\sin\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} F_a = r \\ N = (m + M)g \\ r = g\left(\frac{M}{2} + \frac{2}{3}m\right)\cot\theta \end{cases}$$

Numericamente

$$\begin{cases} \vec{F}_a = -14.5\mathrm{N}\hat{x} \\ \vec{N} = 20.1\mathrm{N}\hat{y} \\ \vec{r} = 14.5\mathrm{N}\hat{x} \end{cases}$$

Notare che se il sistema è in equilibrio il coefficiente di attrito statico μ_s del piano deve soddisfare:

$$F_a \le F_{s,\max} = \mu_s(m+M)g \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \left(\frac{M}{2} + \frac{2}{3}m\right)\frac{\cot\theta}{m+M} \simeq 0.72$$

Esercizio 3

Iniziamo verificando che la componente della forza peso lungo il piano inclinato è sufficiente a vincere la forza di attrito statico: $F_{s,max} = \mu_s mg\cos\theta < mg\sin\theta$, cioè $\mu_s < \tan\theta$. Mettendo i numeri, $0.2 < \tan\frac{\pi}{4} = 1$, quindi il punto si muove. Calcoliamo quindi il lavoro svolto dalla forza d'attrito dinamico sul tratto di lunghezza $l = h_0/\sin\theta$:

$$L_d = -F_d l = -\mu_d N l = -\mu_d N\frac{h_0}{\sin\theta}$$

dove il valore della reazione vincolare si evince dall'equilibrio delle forze lungo la direzione perpendicolare al piano $N = mg\cos\theta$, per cui $L_d = -\mu_d g h_0 m\cot\theta$. Dunque l'energia residua del punto materiale in B soddisfa

$$E_{\mathrm{B}} - E_0 = L_d \implies \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh_0 = -\mu_d N h_0 m\cot\theta \implies v_B = \sqrt{2gh_0\left(1-\mu_d\cot\theta\right)} = 9.4\,\mathrm{m/s}$$

Il moto sulla guida si esplica in assenza d'attrito, dunque vale la conservazione dell'energia meccanica per cui nel punto di distacco C

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2 \implies v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gh_1} = 7.0\,\mathrm{m/s}$$

Noto il modulo della velocità del punto materiale in C e la sua quota, è immediato ricavare il punto di atterraggio, considerato il successivo moto parabolico in assenza di attriti, rettilineo uniforme nella componente x a velocità $v_x = v_C\cos\gamma$ e uniformemente accelerato nella componente y con velocità iniziale $v_{0y} = v_C\sin\gamma$. Dunque le leggi orarie sono rispettivamente

$$\begin{cases} x(t) = v_C\cos\gamma t \\ y(t) = y_C + v_C\sin\gamma t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

avendo posto lo zero del sistema di riferimento cartesiano alla base del piano (sulla verticale rispetto al punto di distacco di coordinate $(0, y_C)$) e il tempo zero quando il punto si trova in C. Per trovare la distanza orizzontale, procediamo prima a calcolare il tempo t^* impiegato per raggiungere quota zero, imponendo

$$y(t^*) = 0 \implies t^* = \frac{v_C\sin\gamma}{g} \pm \sqrt{\frac{v_C^2\sin^2\gamma}{g^2} + \frac{2h_1}{g}}$$

in cui la soluzione cercata è quella positiva $t^* = 1.1$ s e dunque ricaviamo $d = x(t^*) = 6.6$ m.

Esercizio 4

1. La forza esercitata dalla molla sul punto materiale nell'istante iniziale è in modulo pari a k_1x_0. Per esserci moto deve essere $k_1x_0 > F_{s,max} = \mu_s mg$. Sostituendo i valori si ha $k_1x_0 = 30\,\mathrm{N}$ e $\mu_s mg = 3\,\mathrm{N}$ da cui si deduce che il punto materiale effettivamente inizia a muoversi.

2. Per il bilancio energetico applicato al tratto $x_0 + d$, si ha:

$$\frac{1}{2}k_1x_0^2 - \mu_k mg(x_0+d) = \frac{1}{2}mv_{x_0+d}^2.$$

   Se il primo membro dell'espressione precedente è positivo allora il punto materiale riesce ad arrivare sino a $x_0 + d$ e l'urto ha luogo. Sostituendo i valori si ottiene:

$$\frac{1}{2}k_1x_0^2 - \mu_k mg(x_0+d) = 1.809\,\mathrm{J} > 0$$

3. Nell'urto la quantità di moto si conserva:

$$mv_{in} = mv_{x_0+d} = (m+M)v_{fin} \quad \Rightarrow \quad v_{fin} = v_{in}\frac{m}{m+M}$$

Applicando di nuovo il bilancio energetico si ha, chiamando δ la distanza dal punto in cui avviene l'urto in cui i due punti materiali si fermano:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{fin}^2 - \mu_k(m+M)g\delta = 0,$$

da cui $\delta \simeq 12\,\text{cm}$.

4. L'energia dissipata dalla forza d'attrito dinamico è uguale al lavoro fatto dalla forza d'attrito cambiato di segno: $E_{d,attr} = -L_{attr}$. Si ha:

$$L_{attr} = -\mu_k mg(x_0+d) - \mu_k(m+M)g\delta$$

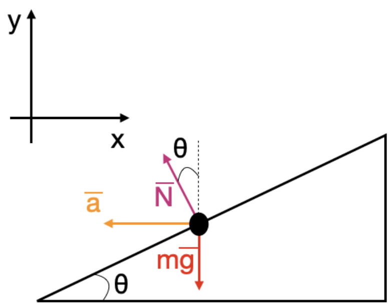
e dunque $E_{d,attr} \simeq 0.9\,\text{J}$. L'energia dissipata durante l'urto è uguale alla differenza tra energia cinetica iniziale ed energia cinetica finale:

$$E_{d,urto} = \frac{1}{2}mv_{in}^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_{fin}^2$$

che da come risultato $E_{d,urto} \simeq 1.4\,\text{J}$. Si noti che $E_{d,attr} + E_{d,urto} = \frac{1}{2}k_1x_0^2$, dove l'ultima espressione è l'energia meccanica iniziale e vale $E_{in} \simeq 2.3\,\text{J}$, nell'approssimazione usata per i valori delle energie dissipate.

Esercizio 5

Soluzione 1 Fissato un riferimento cartesiano assoluto (non inclinato come la strada), dovremo imporre due condizioni: i) che l'auto percorra una traiettoria circolare e dunque che l'accelerazione istantanea lungo x sia centripeta $a_x = -v^2/r$; ii) che essa non si muova in direzione verticale per cui $a_y = 0$.



In assenza di attrito le forze agenti sono il peso $\vec{F}_p = (0, -mg)$ e la reazione vincolare $\vec{N} = (-N\sin\theta, N\cos\theta)$. Dunque usando il secondo principio della dinamica

$$\begin{cases} -N\sin\theta = -m\frac{v^2}{r} \\ N\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v = \sqrt{\frac{rN\sin\theta}{m}} \\ N = \frac{mg}{\cos\theta} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v = \sqrt{gr\tan\theta} = 27\,\text{m/s} \\ N \simeq 10400\,\text{N} \end{cases}$$

Soluzione 2 Fissato un riferimento cartesiano con un'asse parallela al piano e una ortogonale, possiamo scrivere, rispettivamente lungo l'asse parallela e lungo l'asse ortogonale:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = -m\frac{v^2}{r}\cos\theta \\ -mg\cos\theta + N = m\frac{v^2}{r}\sin\theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v = \sqrt{rg\tan\theta} = 27\,\text{m/s} \\ N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{r}\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta} \simeq 10400\,\text{N} \end{cases}$$