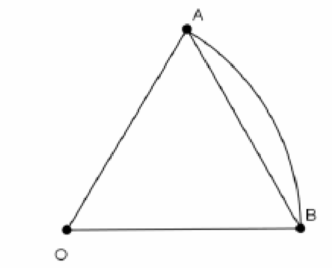
Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 26 giugno 2009

Soluzione del PROBLEMA 1
a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r=1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



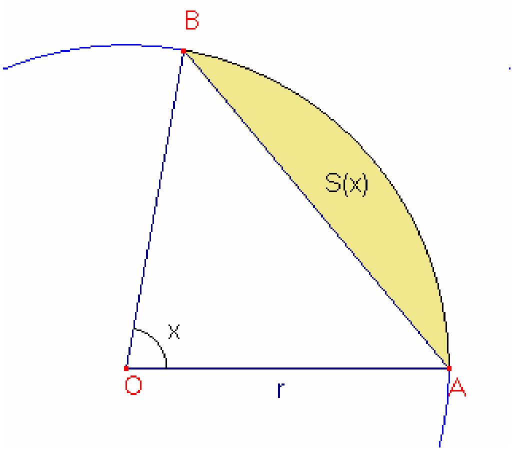
4. Sia $r=2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Punto 1
L'area del triangolo OAB settore circolare è data da:

$$Area(OAB)=\frac{r\cdot r\cdot\sin x}{2}=\frac{1}{2}r^2\sin x$$

L'area del settore circolare, indicando con l la misura dell'arco AB, è

$$Area(settore\ circolare)=\frac{l\cdot r}{2}=\frac{r^2x}{2}.$$



Quindi l'area S del segmento circolare compreso tra l'arco e la corda è data da

$$S(x)=\frac{1}{2}r^2x-\frac{1}{2}r^2\sin x=\frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$$

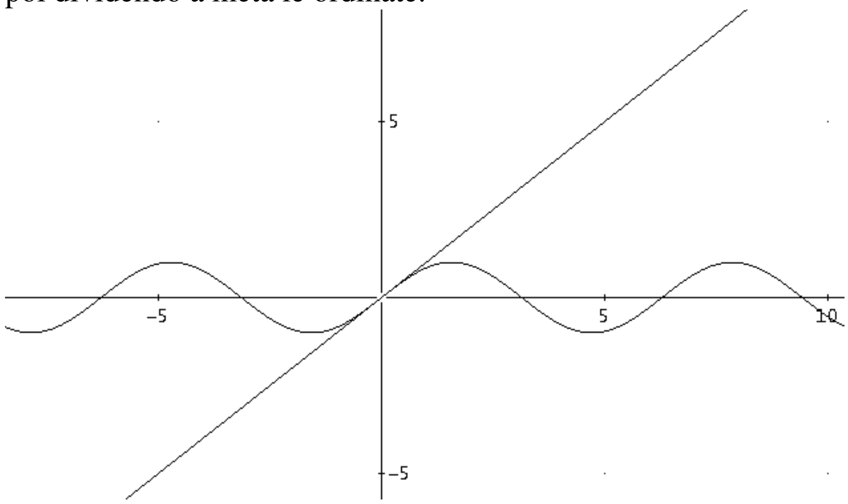
con $x\in[0,2\pi]$.

Punto 2

Se si pone, come richiesto, $r=1$ allora la funzione che si ottiene è la seguente:

$S(x)=\frac{1}{2}(x-\sin x)$ con $x\in[0,2\pi]$.

Il grafico della funzione si può ottenere pensandola come differenza di due funzioni elementari e poi dividendo a metà le ordinate.



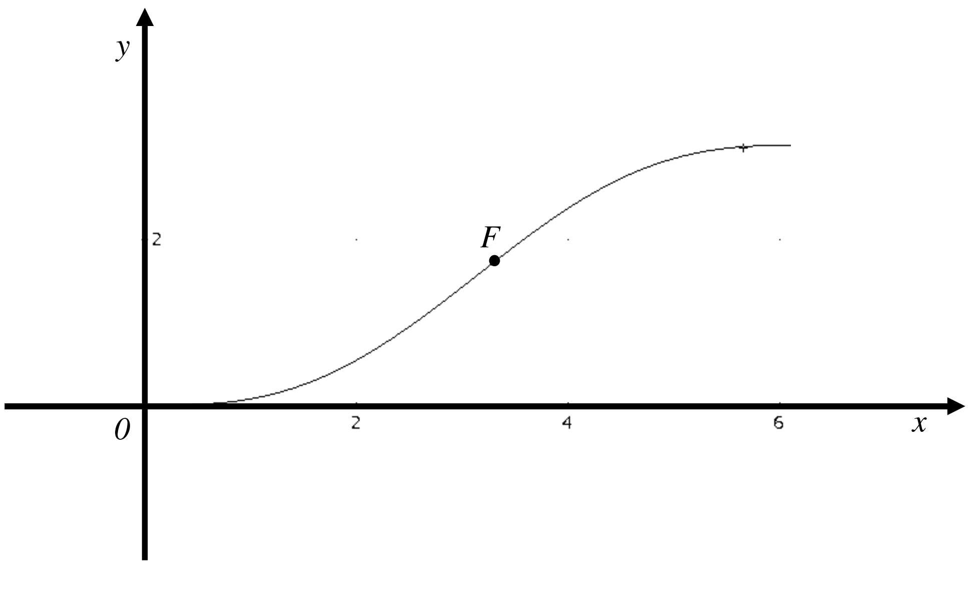
Ci viene assegnato il dominio $[0,2\pi]$.La funzione è derivabile (e quindi continua) per ogni *x*.

La funzione è non negativa per ogni $x\in[0,2\pi]$.

Si ha $S(0)=0$ ed $S(2\pi)=\pi$.

La derivata prima è $S'(x)=\frac{1}{2}(1-\cos x)$ che è positiva per ogni $x\in]0,2\pi]$ e nulla in $x=0$ e in $x=2\pi$. Si vede facilmente che tali punti sono punti di flesso con tangente parallela all'asse *x*.

Ricavando la derivata seconda, si ottiene $S''(x)=\frac{1}{2}\sin x$. Si ha ovviamente $S''(x)\geq 0$ se $x\in[0,\pi]$. In tale intervallo la funzione è convessa. $S''(x)=0$ per $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$. Si tratta di tre flessi; $x=0$ e $x=2\pi$ sono flessi a tangente parallela all'asse *x*. Nel punto $x=\pi$, la derivata prima vale $S'(\pi)=1$. Quindi, in tale punto di flesso $F\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ la tangente è parallela alla bisettrice del primo quadrante.



PUNTO 3.

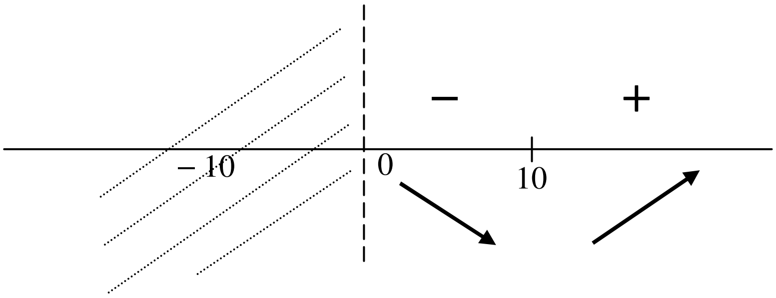
$$A_{\text{settore circolare AOB}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha = 100\ m^2 \qquad sia \quad r = x \quad (x > 0) \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{200}{x^2} \qquad (Crf = 2\pi x)$$

$$\overset{\frown}{AB} : Crf = \alpha : 2\pi \quad \rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi x \cdot \alpha}{2\pi} = x \cdot \alpha = x \cdot \frac{200}{x^2} = \frac{200}{x}$$

$$perimetro_{\text{settore circolare AOB}} = 2x + \overset{\frown}{AB} = 2x + \frac{200}{x}$$

perimetro minimo??

$$y = 2x + \frac{200}{x} \quad \rightarrow \quad y' = 2 - \frac{200}{x^2} \quad \rightarrow \quad y' > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{2x^2 - 200}{x^2} > 0 \ \leftrightarrow \ x < -10 \vee x > 10$$

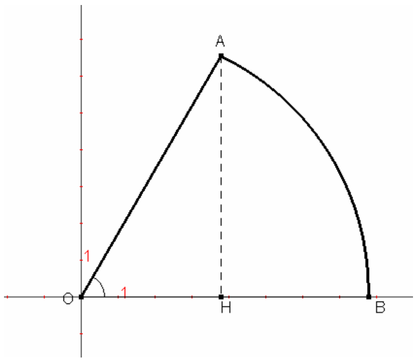


Perimetro minimo per $x = r = 10\ m$

$$\alpha = \frac{200}{100} = 2 \ \text{ radianti}$$

$$2 : x = \pi : 180° \quad \Rightarrow \quad x = \frac{360°}{\pi} \cong 114,6°$$

PUNTO 4.



$$\overline{OA} = \overline{OB} = 2, \quad A\overset{\Delta}{O}B = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow$$

$$O(0;0), \quad B(2;0), \quad A(1;\sqrt{3})$$

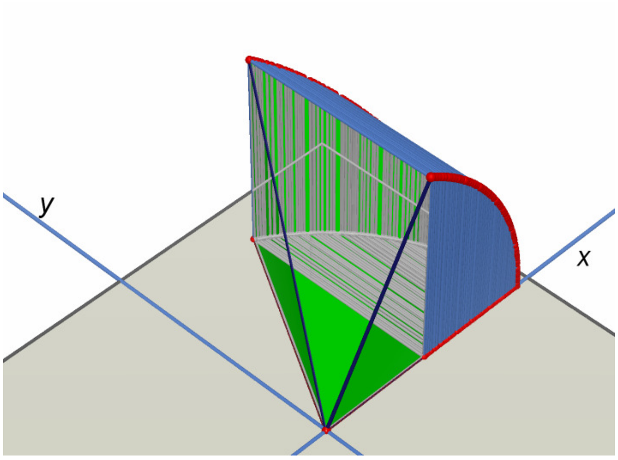
Equazione della retta r passante per O e per A: $\quad y = \sqrt{3}x$

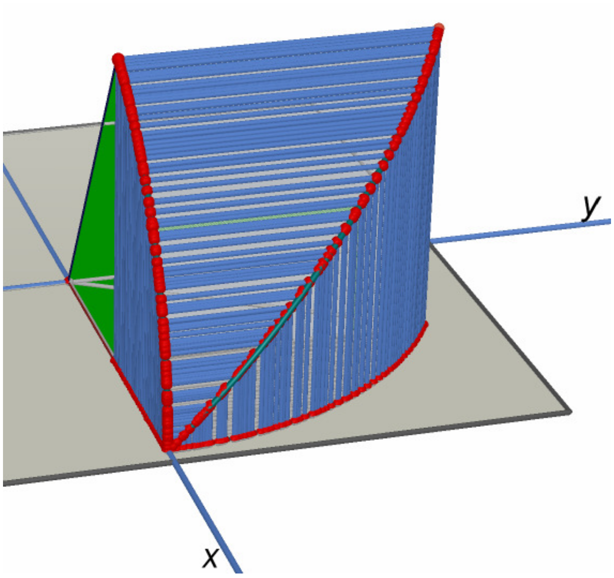
Equazione dell'arco di circonferenza passante per A e per B: $\quad y = \sqrt{4 - x^2}$

$$W = \int_0^1 \left(\sqrt{3}x\right)^2 dx + \int_1^2 \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 \left(4 - x^2\right) dx =$$

$$= \left[x^3\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1 + 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

Il solido si può anche pensare suddiviso in due parti. La prima parte è una piramide obliqua a base quadrata e i suo volume è $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1$. La seconda parte del solido è più difficile da visualizzare; per determinarne il volume occorre usare il "metodo delle fette", integrando la funzione che esprime la sua sezione rispetto alla variabile x. Si ottiene quindi $\frac{5}{3}$. Il volume W del solido è pertanto $\frac{8}{3}$.





Commento

Il problema è fattibile con una preparazione media. Ci sono dei risultati di controllo e i quesiti sono abbastanza indipendenti.
Le conoscenze acquisite l'ultimo anno di liceo sono necessarie per affrontare tre dei quattro punti richiesti.
I calcoli non sono particolarmente laboriosi, per un alunno che sappia però come muoversi.
Punto 1. Semplice, occorre solo non farsi suggestionare dalla figura del testo, che è disegnata in un caso particolare.
Punto 2. Facile
Punto 3. Non è del tutto banale perché l'allievo doveva individuare come variabile il raggio e non l'angolo.
Punto 4. Classico quesito sui volumi calcolati con il "metodo delle fette" (questo argomento, comunque, non è esplicitamente presente nei programmi ancora vigenti).