La forma differenziale lineare $\frac{-3}{3x+y+2}dx + \frac{3x+y+1}{3x+y+2}dx$ è una forma differenziale esatta, nel senso che esiste una espressione F(x;y) il cui differenziale è proprio l'espressione di cui sopra.

Indichiamo con

$A(x;y) = \frac{-3}{3x+y+2}$ e con

$B(x;y) = \frac{3x+y+1}{3x+y+2}$

Sappiamo che F(x;y) è differenziabile se il suo differenziale lineare è pari a $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dx$.

Questo avviene se e solo se:

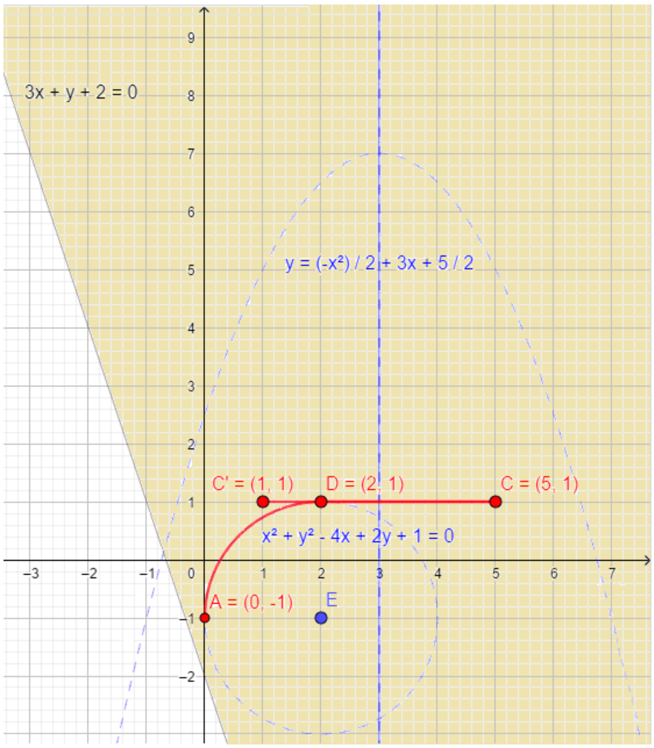
1) $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$
2) L'insieme di definizione contiene il cammino di integrazione in uno spazio semplicemente connesso (cioè non vi sono buchi all'interno dell'insieme che compone il dominio di esistenza.

Il punto 1) è garantito in quanto

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{-3}{3x+y+2}\right)}{\partial y} = -3\frac{\partial(3x+y+2)^{-1}}{\partial y} = -3(-1)(3x+y+2)^{-2}(1) = \frac{3}{(3x+y+2)^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{3x+y+1}{3x+y+2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{3x+y+2}{3x+y+2} - \frac{1}{3x+y+2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(1 - \frac{1}{3x+y+2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{3x+y+2}\right)}{\partial x} = -(-1)(3x+y+2)^{-2}(3) = \frac{3}{(3x+y+2)^2}$$

Il punto 2 è garantito osservando che il dominio di esistenza della forma differenziale lineare è dato dai punti che NON si trovano sulla retta di equazione 3x + y + 2 = 0 dunque il campo di esistenza corrisponde a 2 semipiani ed il cammino C, descritto come il percorso formato da più passi i quali si trovano tutti sullo stesso semipiano 3x + y + 2 > 0 (sul grafico è la regione di colore arancione).



Infatti il passo che parte dal punto A e arriva al punto D si trova su una circonferenza di equazioni

$x^2 + y^2 -4x + 2y + 1 = 0$ cioè

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ quindi una circonferenza di centro nel punto (2; -1) e raggio 2

Il passo che parte dal punto D al punto C(1;5) è un segmento

ed il passo finale è un altro segmento che ha come estremi il punto C ed il punto C'(1;1)

infatti l'asse di simmetria della parabola è x=3 (x=-b/2a)

disegnando i vari cammini sul piano cartesiano come in figura

dunque $\frac{\partial F}{\partial x} = A(x;y)$ quindi $F(x;y) = \int \frac{-3}{3x+y+2}dx + C(y)$

$F(x;y) = -ln|3x+y+2| + C(y)$

Poi $\frac{\partial F}{\partial y} = B(x;y)$ per cui $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial -ln|3x+y+2|+C(y)}{\partial y} = \frac{-1}{3x+y+2} + C'(y)$ perciò

$\frac{-1}{3x+y+2} + C'(y) = \frac{3x+y+1}{3x+y+2}$

$C'(y) = \frac{3x+y+1}{3x+y+2} + \frac{1}{3x+y+2}$

$C'(y) = \frac{3x+y+2}{3x+y+2}$

$C'(y) = 1$

$C(y) = y + C$

Quindi

$F(x;y) = -ln|3x + y + 2| + y + C$ e per semplicità considero la primitiva $F(x;y) = -ln|3x + y + 2| + y$

Osservando poi che l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare quando questa è esatta allora tale integrale non dipende dal cammino, ma solo dal valore della F nei punti iniziali e finali, cioè

$\int_{C(P_{in};P_{fin})} A(x;y)dx + B(x;y)dx = F(P_{fin}) - F(P_{in})$

Quindi se il cammino C lo consideriamo globalmente i punti di partenza e di arrivo sono rispettivamente A e C'

quindi

$\int_C \frac{-3}{3x+y+2}dx + \frac{3x+y+1}{3x+y+2}dx = -ln|3 + 1 + 2| + 1 - (-ln|0 - 1 + 2| - 1) = -ln6 + 1 - (-1) = 2 - ln6$

Se invece voglio calcolare l'integrale sui 3 passi che vanno dal punto A al punto D, dal punto D al punto C e dal punto C al punto C' abbiamo

$\int_{C(A;D)} \frac{-3}{3x+y+2}dx + \frac{3x+y+1}{3x+y+2}dx = -ln|6 + 1 + 2| + 1 - (-ln|0 - 1 + 2| - 1) = -ln9 + 1 - \ln 1 + 1 = 2 - ln9$

$\int_{C(D;C)} \frac{-3}{3x+y+2}dx + \frac{3x+y+1}{3x+y+2}dx = -ln|10 + 1 + 2| + 1 - (-ln|6 + 1 + 2| + 1) = -ln13 + 1 + ln9 - 1 = ln9 - ln13$

$\int_{C(C;C')} \frac{-3}{3x+y+2}dx + \frac{3x+y+1}{3x+y+2}dx = -ln|3 + 1 + 2| + 1 - (-ln|10 + 1 + 2| + 1) = -\ln 6 + 1 + ln13 - 1 = ln13 - ln6$