

Algebra Lineare a.a. 2024/2025
Prova scritta - 20 giugno 2025

NOME e COGNOME: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	9	
2	9	
3	9	
4	9	
Totale	36	

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.
Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.*

Voto/30:

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z a coefficienti complessi e parametro $k \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x - y + z = i \\ x - ky - z = 1 \\ x + y - k^2z = 1 \end{cases}$$

- (a) Discutere la compatibilità del sistema al variare del parametro.
- (b) In corrispondenza dei valori per cui il sistema risulta essere compatibile, descrivere lo spazio delle soluzioni fornendone
- (i) la dimensione (su \mathbb{C}),
 - (ii) una parametrizzazione esplicita.

Risoluzione:

La matrice dei coefficienti del sistema lineare è quadrata, ne calcoliamo il determinante, che risulta essere uguale a $k^3 - k^2 + k + 3 = (k + 1)(k - 1 - i\sqrt{2})(k - 1 + i\sqrt{2})$. Quindi se k è diverso da $-1, i + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}$ la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da zero e il sistema lineare è compatibile e ammette un'unica soluzione, cioè lo spazio delle sue soluzioni ha dimensione 0.

In tal caso possiamo utilizzare la formula di Cramer per determinare la soluzione

$$x = \frac{1}{k^3 - k^2 + k + 3} \det \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix} = \frac{ik^2 + (-1 - i)k + 2 + i}{k^2 - 2k + 3}$$

$$y = \frac{1}{k^3 - k^2 + k + 3} \det \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix} = \frac{(-1 + i)k + 1 - i}{k^2 - 2k + 3}$$

$$z = \frac{1}{k^3 - k^2 + k + 3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1 + i}{k^2 - 2k + 3}$$

Negli altri casi calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.

Se $k = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & i \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & i \\ 0 & 2 & -2 & 1 - i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quindi il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice completa sono entrambi uguali a 2, il sistema è compatibile e la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale a $3 - 2 = 1$. Risolvendo si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1+i}{2} \\ y = \frac{1-i}{2} + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Se $k = 1 \pm i\sqrt{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & i \\ 1 & -1 \mp i\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \mp i2\sqrt{2} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & i \\ 0 & \mp i2 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - i \end{array} \right)$$

Quindi il rango della matrice dei coefficienti è diverso dal rango della matrice completa e il sistema non è compatibile.

Il sistema è compatibile sse

$$k \neq 1 \pm i\sqrt{2}$$

Dimensione al variare di k :

$$\begin{aligned} k \neq -1, 1 \pm i\sqrt{2} &\Rightarrow \dim = 0 \\ k = -1 &\Rightarrow \dim = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3

$$U: x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

e il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- Mostrare che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.
- Scrivere l'espressione in coordinate standard di $\pi_U^W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ proiezione su U parallela a W .
- Dimostrare che f coincide con la proiezione $\pi_{U'}^{W'}$ su un sottospazio U' parallela a un sottospazio W' , determinare U' e W' .
- Gli endomorfismi π_U^W e f sono simultaneamente diagonalizzabili?

Risoluzione:

Abbiamo $\dim U = 2$ e $\dim W = 1$, quindi $\dim U + \dim W = 3$, inoltre $U \cap W = \{0\}$ poiché il generatore di W non soddisfa l'equazione cartesiana di U , pertanto $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

$$\pi_U^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$$

quindi $(x_1 - t) + (x_2 - t) + 2(x_3 - t) = 0$, cioè $t = \frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{4}$ e

$$\pi_U^W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Basta determinare gli autospazi di f relativi agli autovalori 0 e 1.

$$E(0) = \ker(f) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \quad E(1) = \ker(f - \text{id}): 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Poiché $E(0) \oplus E(1) = \mathbb{R}^3$, l'endomorfismo f coincide con la proiezione su $U' := E(1)$ parallela a $W' := E(0)$.

Poiché $W \subset U'$ e $W' \subset U$, abbiamo che W , W' e $U \cap U'$ sono autospazi simultanei di π_U^W e $f = \pi_{U'}^{W'}$ con $W \oplus W' \oplus (U \cap U') = \mathbb{R}^3$.

Espressione in coordinate di π_U^W :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. Si consideri il seguente endomorfismo Φ di $\mathbb{R}[x]$

$$\Phi(p(x)) = \frac{d}{dx}((x+1)p(x) + xp(x+1))$$

derivata della somma di $x+1$ per $p(x)$ più x per il polinomio p valutato in $x+1$.

Esso è iniettivo e preserva il grado dei polinomi, cioè se $p(x)$ è diverso da 0 e ha grado d allora anche $\Phi(p(x))$ è diverso da 0 e ha grado d . In particolare, per ogni intero $d \geq 0$, il sottospazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$, dei polinomi di grado $\leq d$, è invariante per Φ . Restringendo Φ si ottiene quindi un endomorfismo di $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ che denotiamo con

$$\Phi_{\leq d}: \mathbb{R}[x]_{\leq d} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq d}.$$

- (a) Determinare gli autovalori di $\Phi_{\leq 2}$ e dire se è diagonalizzabile.
- (b) Determinare gli autospazi di $\Phi_{\leq 2}$.
- (c) Per ogni $d \geq 0$, determinare gli autovalori di $\Phi_{\leq d}$ e dire se è diagonalizzabile.

Risoluzione:

Determiniamo esplicitamente $\Phi_{\leq 2}(ax^2 + bx + c) = \Phi(ax^2 + bx + c)$, abbiamo

$$\frac{d}{dx}((x+1)(ax^2 + bx + c) + x(ax+1)^2 + b(x+1) + c) = 6ax^2 + (6a+4b)x + (a+2b+2c)$$

Quindi rispetto alla base $(x^2, x, 1)$ la matrice associata a $\Phi_{\leq 2}$ è

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Da qui si deduce immediatamente, poiché la matrice è triangolare, che gli autovalori sono 6, 4, 2, tutti distinti, quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile. Gli autospazi sono

$$E(2) = \text{Span}\{1\}, \quad E(4) = \text{Span}\{x+1\}, \quad E(6) = \text{Span}\{4x^2 + 12x + 7\}.$$

In generale, per ogni $d \geq 0$, poiché Φ preserva il grado dei polinomi, rispetto alla base dei monomi monici $(x^d, x^{d-1}, \dots, x, 1)$, la matrice associata a $\Phi_{\leq d}$ è triangolare inferiore e i suoi autovalori, cioè i coefficienti sulla diagonale, sono dati, per ogni $0 \leq e \leq d$, dal coefficiente direttore di

$$\Phi(x^e) = \frac{d}{dx}((x+1)(x^e) + x(x+1)^e) = 2(e+1)x^e + \dots$$

Quindi sono $2(d+1), 2(d), 2(d-1), \dots, 4, 2$, tutti distinti, pertanto $\Phi_{\leq d}$ è diagonalizzabile per ogni $d \geq 0$.

Autovalori di $\Phi_{\leq 2}$:

6, 4, 2

Autospazi:

$$E(2) = \text{Span}\{1\}, \quad E(4) = \text{Span}\{x+1\}, \\ E(6) = \text{Span}\{4x^2 + 12x + 7\}$$

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3

$$U: x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad W: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,$$

e i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ degli endomorfismi di \mathbb{R}^3

$$A = \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) : f(U) \subseteq U\}, \quad B = \{g \in \text{End}(\mathbb{R}^3) : g(W) \subseteq W\}.$$

- (a) Mostrare che A e B sono sottospazi vettoriali di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$.
- (b) Determinare la dimensione di A e la dimensione di B .
- (c) Determinare la dimensione di $A \cap B$ e la dimensione di $A + B$.

Risoluzione:

Mostriamo che A è un sottospazio vettoriale di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ poiché U è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , per B la dimostrazione è identica poiché anche W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 . Bisogna dimostrare che A è non vuoto, che è chiuso per la somma e per il prodotto per scalari. L'insieme A è non vuoto poiché contiene ad esempio l'identità $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$. Inoltre se $f, f' \in A$, cioè se $f(u)$ e $f'(u)$ appartengono a U per ogni $u \in U$, anche $(f + f')(u) = f(u) + f'(u) \in U$ per ogni $u \in U$. Infine, se $t \in \mathbb{R}$ e $f(u) \in U$ per ogni $u \in U$, anche $(tf)(u) = tf(u) \in U$ per ogni $u \in U$.

Possiamo utilizzare l'isomorfismo di spazi vettoriali $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, da $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ a $M_{3,3}(\mathbb{R})$, che a un endomorfismo f associa la sua matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, rispetto alla base \mathcal{B} . Se prendiamo come base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, v)$ di \mathbb{R}^3 una base ottenuta completando una qualsiasi base (u_1, u_2) di U , gli endomorfismi $f \in A$ corrispondono biettivamente alle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Il sottospazio vettoriale di tali matrici ha dimensione 7. Quindi $\dim A = 7$. Analogamente, poiché identico ragionamento può essere fatto con W al posto di U e $\dim W = \dim U = 2$, abbiamo anche $\dim B = 7$.

Notiamo che abbiamo $\dim(U \cap W) = 1$ e $U + W = \mathbb{R}^3$, quindi possiamo considerare una base $\mathcal{B} = (v, u, w)$ di \mathbb{R}^3 tale che $v \in U \cap W$, (v, u) base di U e (v, w) base di W . Rispetto a tale base, gli endomorfismi di $A \cap B$ corrispondono biettivamente alle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

poiché $f \in A \cap B$ sse $f(v) \in U \cap W$, $f(u) \in U$ e $f(w) \in W$. Quindi $\dim(A \cap B) = 5$.

Infine, per la formula di Grassmann, $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) = 9$, cioè $A + B = \text{End}(\mathbb{R}^3)$.

$$\dim A = \dim B = \boxed{7} \quad \dim A \cap B = \boxed{5} \quad \dim A + B = \boxed{9}$$