

Un teorema sui quadrilateri bicentrici

gabo

Preambolo

Volevo condividere questo teorema che sono riuscito a dimostrare questa domenica. È un teorema molto sconosciuto - credo -, del quale non riesco a trovare neanche il nome (quindi non riesco a trovarne neanche una dimostrazione). Questa è la dimostrazione più semplice che sono riuscito a creare.

Enunciato

In un qualsiasi quadrilatero bicentrico inscritto in una circonferenza di raggio R e circoscritto a una circonferenza di raggio r , sussiste la seguente disuguaglianza:

$$R \geq r\sqrt{2}$$

Dimostrazione

Sia $ABCD$ un quadrilatero bicentrico inscritto nella circonferenza γ di raggio R e di centro O al contempo circoscritto alla circonferenza τ di raggio r e di centro I . Chiaramente, $R > r$, perché altrimenti $ABCD$ non potrebbe essere tangente a τ . Ottenuta la disuguaglianza, la sfida è dimostrare che il valore minimo del rapporto $\frac{R}{r}$ è proprio $\sqrt{2}$. Si può sfruttare la tangenza tra τ e $ABCD$ per individuare i triangoli ABI , BCI , CDI , ADI rispettivamente di aree \mathcal{A}_A , \mathcal{A}_B , \mathcal{A}_C , \mathcal{A}_D . La somma delle aree risulta $\mathcal{A}_A + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_C + \mathcal{A}_D = \mathcal{A}_{ABCD}$ dalla triangolazione di $ABCD$, possibile perché I è interno ad $ABCD$ (altrimenti si otterrebbe un assurdo per cui i lati di $ABCD$, tangenti a τ per costruzione, sarebbero secanti). Dal momento che $ABCD$ è tangenziale a τ , si può scegliere di esprimere l'area di ciascun triangolo come semiprodotto della misura x del lato del triangolo che è tangente a τ e la misura di r (perché certamente esiste un raggio r perpendicolare al lato, dato che il lato x è tangente a τ):

$$\mathcal{A}_X = \frac{1}{2}xr.$$

Indicando con a, b, c, d le misure dei lati di $ABCD$ in ordine arbitrario, si giunge all'uguaglianza:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr = \frac{1}{2}(a + b + c + d)r = pr,$$

dove $p = \frac{a + b + c + d}{2}$ è la misura del semiperimetro di $ABCD$.

Il rapporto $\frac{R}{r}$ è minimo quando r è massimo; fissato il semiperimetro p , il raggio di $ABCD$ è massimo quando \mathcal{A}_{ABCD} è massima. È noto che tra i quadrilateri isoperimetrici, quello di massima area è un quadrato^[1]. Dalla formula di Brahmagupta^[2], si sa che:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Quindi:

$$rp = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Nel caso del quadrato, $p = 2\ell = 2\sqrt{2}R$, perché $R = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$. La relazione appena utilizzata si può ricavare notando che ABC è un triangolo rettangolo per costruzione - $ABCD$ è un quadrato, quindi $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

-, $\overline{BC} = 2R$ è un diametro di γ . Dal teorema di Pitagora si ricava che $4R^2 = 2\ell^2 \implies 2\ell = 2\sqrt{2}R$. Sostituendo $a = b = c = d = \ell \implies p - a = p - b = p - c = p - d = p - \ell = \frac{p}{2}$ nell'uguaglianza delle aree si ricava che:

$$rp = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^4} \implies r = \frac{p}{4}.$$

Sostituendo $p = 2\sqrt{2}R$, si ottiene finalmente che:

$$r = \frac{2\sqrt{2}R}{4} \implies R = r\sqrt{2}.$$

Avendo concluso che il valore minimo del rapporto è $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$, si è dimostrato che in generale $R \geq r\sqrt{2}$, cioè la tesi.

Note alla lettura

[1] Formula di Brahmagupta:

In un quadrilatero ciclico di lati di misure a, b, c, d , sia f la misura della diagonale sottesa dai lati che misurano a, b e c, d . Dato che $abcd$ è ciclico, $\widehat{ab} = \alpha = \pi - \widehat{cd} \implies \cos(\widehat{ab}) = -\cos(\widehat{cd})$. Dal teorema del coseno:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

L'area di $abcd$ può essere scritta come somma delle aree dei triangoli abf e cdf , quindi:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin(\alpha) + \frac{1}{2}cd \sin(\pi - \alpha) = \frac{ab + cd}{2} \sin(\alpha) \implies \mathcal{A}^2 = \frac{(ab + cd)^2}{4} \sin^2(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}\right)^2 = \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}\right) =$$

$$\left(\frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2ab + 2cd}\right) \left(\frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2ab + 2cd}\right) =$$

$$\frac{(a + c + d - b)(b + c + d - a)(a + b + c - d)(a + b + d - c)}{2(ab + cd)^2} =$$

$$\frac{(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2d)}{4(ab + cd)^2} = \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2}.$$

Sostituendo questo valore nella formula dell'area:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{(ab + cd)^2}{4} \cdot \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2}. \text{ Da cui:}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

[2] Quadrilatero di area massima:

A parità di perimetro, il quadrilatero con l'area massima è un quadrato. Si dimostrerà l'asserto provando innanzi tutto che il quadrilatero di area massima è convesso, poi che è ciclico con due angoli retti e, infine, che deve avere tutti i lati uguali e deve avere tutti gli angoli uguali.

È immediato capire che il quadrilatero debba essere convesso, perché per ogni quadrilatero concavo, ce n'è uno convesso con lo stesso perimetro che ha area maggiore. Se si costruisce un quadrilatero $ABCD$, dove la concavità si trova in \widehat{D} , riflettendo D sulla retta passante per \overline{AC} , si ottiene un quadrilatero $ABCD'$

che ha un rombo di area in più rispetto ad $ABCD$. L'area di \mathcal{A} di $ABCD$ si può calcolare come somma delle aree dei triangoli ABC e ADC (per brevità sono indicate le misure dei lati nell'ordine a, b, c, d , e con f la misura di \widehat{AC}):

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin(\alpha) + \frac{1}{2}cd \sin(\beta) \implies 16\mathcal{A}^2 = 4a^2b^2 \sin^2(\alpha) + 4c^2d^2 \sin^2(\beta) + 8abcd \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

dove α è l'ampiezza di \widehat{ABC} , e β è l'ampiezza di \widehat{ADC} .

Dal teorema del coseno:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\beta)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\beta)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos(\alpha) - 2cd \cos(\beta)$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2(\alpha) + 4c^2d^2 \cos^2(\beta) - 8abcd \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

Sommando questa equazione a quella dell'area:

$$16\mathcal{A}^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd \cos(\alpha + \beta)$$

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(\alpha + \beta) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Massimizzando $-8abcd \cos(\alpha + \beta)$, il meglio che si può sperare è che $\cos(\alpha + \beta) = -1$ (anche che $abcd = \frac{p^4}{16}$ perché $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$), cioè che $\alpha + \beta = \pi$, quindi $ABCD$ dev'essere ciclico. Minimizzando $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$, il meglio che si può sperare è che $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 0 \implies a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

Allora:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) = c^2 + d^2 + 2cd \cos(\alpha)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) = c^2 + d^2 + 2cd \cos(\alpha)$$

$$-2ab \cos(\alpha) = 2cd \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha)(ab + cd) = 0$$

Dal momento che $ab + cd > 0$, dato che a, b, c, d sono numeri positivi, l'unica opzione è che $\cos(\alpha) = 0$. Sapendo che $ABCD$ è ciclico, necessariamente si ha che $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $ABCD$ è ciclico, inscritto in una circonferenza di raggio r e di centro O , e ha una diagonale, supponendo - senza perdita di generalità - che sia \widehat{AC} , opposta a due angoli retti, quindi ABC e ACD sono triangoli rettangoli, retti in B e in D rispettivamente, mentre \widehat{AC} è un diametro. Dato che l'area \mathcal{A}_{ABCD} si può scrivere come somma delle aree dei triangoli rettangoli:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD}$$

Ovviamente, le aree componenti non dipendono l'una dall'altra, allora è possibile massimizzare ciascun addendo singolarmente. Massimizzando prima l'area di ABC . Detto θ l'angolo acuto formato dal raggio \widehat{OB} e \widehat{OC} , l'area di ABC si può calcolare come somma di $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC}$. Si vede chiaramente che:

$$\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \frac{1}{2}r^2 \sin(\theta).$$

L'area $\mathcal{A}_{ABC} = r^2 \sin(\theta)$ è massima quando $\sin(\theta) = 1$, cioè quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\widehat{OAB} \cong \widehat{BOC} = \frac{\pi}{4}$, cioè quando ABC è isoscele. Per evidenti motivi di simmetria, l'area di ACD è massima quando ACD è isoscele, quindi $ACD \cong ABC$, vale la catena di congruenze $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{AD} = r\sqrt{2}$. Si noti anche che $\widehat{BAD} \cong \widehat{BCD} \cong \frac{\pi}{2}$ e che $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$, quindi $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADB} \cong \widehat{BAD} \cong \widehat{BCD}$. Si vede anche che, siccome $a = b = c = d = \ell$, è confermata l'ipotesi di massimizzazione di $abcd$, infatti $abcd = \ell^4 = \frac{p^4}{16} = \frac{(2\ell)^4}{16} = \ell^4$. È dimostrato così che $ABCD$, il quadrilatero isoperimetrico di area

massima, è necessariamente un quadrato.

Conclusion

Spero che questa lettura sia stata gradevole, magari i calcoli sono un po' fastidiosi, ma tutto sommato spero sia stato un piacere leggere questo documento. Sono troppo pigro per disegnare i diagrammi in *L^AT_EX*, consiglio vivamente di seguire con un disegno.