

# Soluzione del Problema sulla Variabile Aleatoria Geometrica e Bernoulli

## Dati del problema

Siano:

- $N \sim \text{Geom}(\theta)$ , ovvero:  
$$\mathbb{P}(N = n) = \theta(1 - \theta)^{n-1}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$
- $X(1), X(2), \dots \sim \text{Bernoulli}(p)$ , indipendenti tra loro e da  $N$
- $Z = \sum_{k=1}^N X(k)$

## Soluzione

### 1. Calcolo di probabilità fondamentali

a)  $\mathbb{P}(X(1) + X(2) + X(3) = 2)$

Poiché le  $X(i)$  sono Bernoulli i.i.d.:

$$X(1) + X(2) + X(3) \sim \text{Bin}(3, p)$$

$$\mathbb{P}(\text{Bin}(3, p) = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1 - p) = 3p^2(1 - p)$$

b)  $\mathbb{P}(X(1) = 1 \mid X(1) + X(2) + X(3) = 2)$

Per la probabilità condizionata:

$$\mathbb{P}(X(1) = 1 \mid S = 2) = \frac{\mathbb{P}(X(1) = 1 \cap S = 2)}{\mathbb{P}(S = 2)} = \frac{2p^2(1 - p)}{3p^2(1 - p)} = \frac{2}{3}$$

### 2. Probabilità condizionate

a)  $\mathbb{P}(Z = 2 \mid N = 3)$

Condizionato a  $N = 3$ :

$$Z \mid N = 3 \sim \text{Bin}(3, p) \Rightarrow \mathbb{P}(Z = 2 \mid N = 3) = 3p^2(1 - p)$$

b)  $\mathbb{P}(X(1) = 1 \mid N = 3, Z = 2)$

Analogamente al punto 1b):

$$\mathbb{P}(X(1) = 1 \mid N = 3, Z = 2) = \frac{2}{3}$$

### 3. Distribuzione condizionata

a) Densità di  $Z \mid N = n$

$$Z \mid N = n \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow \mathbb{P}(Z = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

per  $k = 0, 1, \dots, n$ .

b) Valore atteso condizionato

$$\mathbb{E}(Z \mid N = n) = np$$

### 4. Valori attesi

a) Variabile  $\mathbb{E}(Z \mid N)$

$$\mathbb{E}(Z \mid N) = pN$$

b) Valore atteso di  $Z$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Z \mid N)] = \mathbb{E}[pN] = p\mathbb{E}(N) = \frac{p}{\theta}$$

### 5. Covarianza

Covarianza tra  $Z$  e  $N$

$$\text{Cov}(Z, N) = \mathbb{E}(ZN) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(N)$$

Dove:

$$\mathbb{E}(ZN) = p\mathbb{E}(N^2) = p \left( \frac{2-\theta}{\theta^2} \right)$$

$$\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(N) = \frac{p}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{p}{\theta^2}$$

Quindi:

$$\text{Cov}(Z, N) = \frac{p(2-\theta)}{\theta^2} - \frac{p}{\theta^2} = \frac{p(1-\theta)}{\theta^2}$$

### Riepilogo dei risultati

1a)  $\mathbb{P}(X(1) + X(2) + X(3) = 2) = 3p^2(1-p)$

1b)  $\mathbb{P}(X(1) = 1 \mid S = 2) = \frac{2}{3}$

2a)  $\mathbb{P}(Z = 2 \mid N = 3) = 3p^2(1-p)$

2b)  $\mathbb{P}(X(1) = 1 \mid N = 3, Z = 2) = \frac{2}{3}$

3a)  $\mathbb{P}(Z = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

3b)  $\mathbb{E}(Z \mid N = n) = np$

4a)  $\mathbb{E}(Z \mid N) = pN$

4b)  $\mathbb{E}(Z) = \frac{p}{\theta}$

5)  $\text{Cov}(Z, N) = \frac{p(1-\theta)}{\theta^2}$