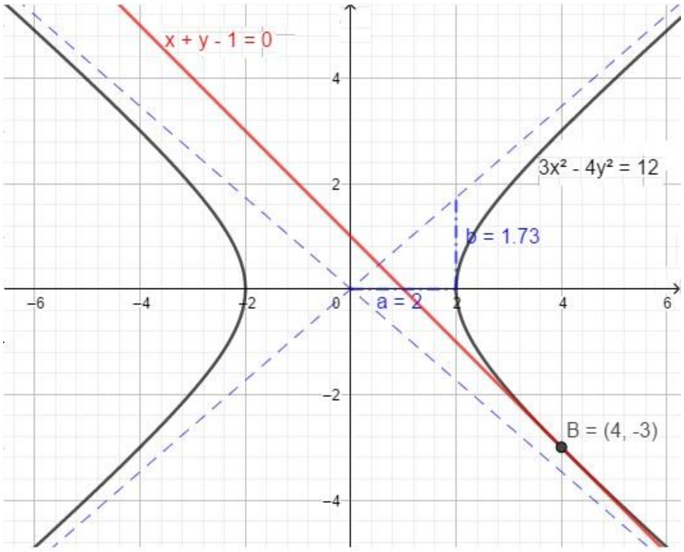
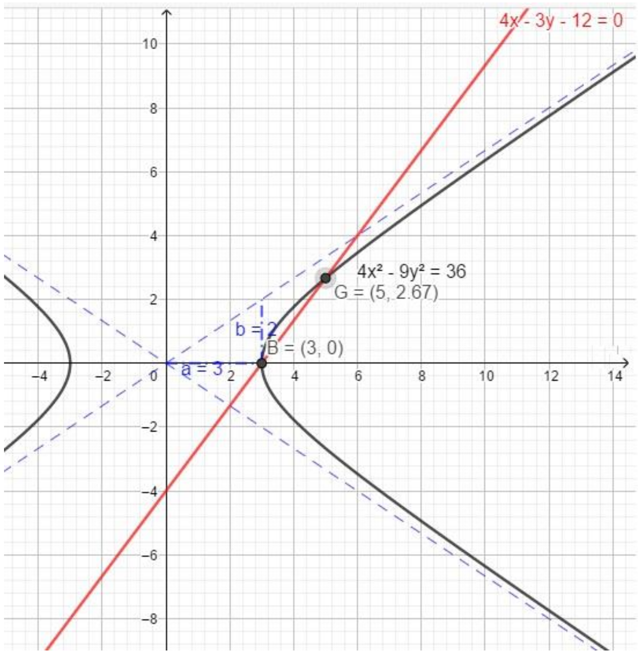
la) 3x^2-4y^2=12; x+y-1=0.



$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 12 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 12 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3(1 - y)^2 - 4y^2 = 12 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3(y^2 - 2y + 1) - 4y^2 = 12 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y^2 - 6y + 3 - 4y^2 - 12 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} -y^2 - 6y - 9 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} -(y + 3)^2 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} y + 3 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 1 - (-3) = 4 \end{cases}$$

la soluzione è (4;-3) dunque vi è un unico punto di intersezione con intersezione multipla, quindi la posizione reciproca è di tangenza.

b) 4x^2-9y^2=36; 4x-3y-12=0.



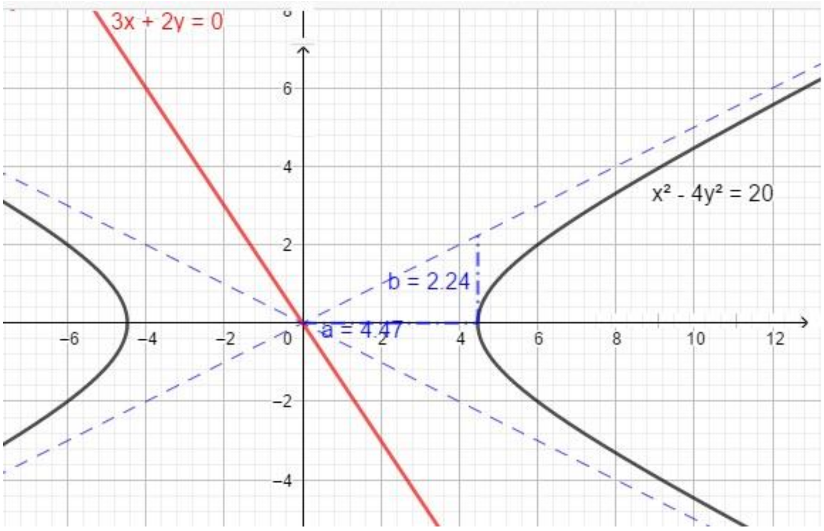
$$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ 4x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x^2 - (3y)^2 = 36 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x^2 - (4x - 12\,)^2 = 36 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x^2 - (16x^2 - 96x + 144\,) = 36 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x^2 - 16x^2 + 96x - 144 - 36 = 0 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -12x^2 + 96x - 180 = 0 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x - 3)(x - 5) = 0 \\ 3y = 4x - 12 \end{cases}$$

Ho 2 soluzioni distinte:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 3y = 12 - 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ 3y = 20 - 12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 9 \\ 3y = 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ 3y = -16 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

le soluzioni sono (9;8) e (-1;-16/3) dunque vi sono 2 punti di intersezione, quindi la posizione reciproca è di incidenza.

c) x^2-4y^2=20; 3x+2y=0.

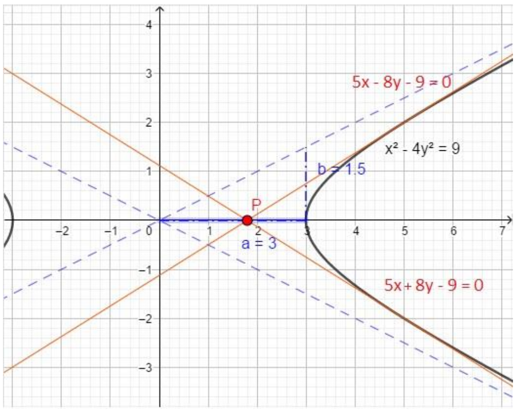


$$\begin{cases} x^2-4y^2=20 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-(2y)^2=20 \\ 2y=-3x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-(-3x\ )^2=20 \\ 2y=-3x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-9x^2=20 \\ 2y=-3x \end{cases}$$
$$\begin{cases} -8x^2=20 \\ 2y=-3x \end{cases}$$

Che è impossibile quindi la retta e l'iperbole non hanno punti in comune e la loro posizione reciproca è di non incidenza.

3) Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione data condotte dal punto P. x^2-4y^2=9, P=(9/5;0).

Il fascio di rette proprio passante per il punto P ha equazioni $y=m(x-\frac{9}{5})$, dunque mettendo a sistema otteniamo



$$\begin{cases} x^2-4y^2=9 \\ y=m\left(x-\frac{9}{5}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-4\left[m\left(x-\frac{9}{5}\right)\right]^2=9 \\ y=m\left(x-\frac{9}{5}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-4m^2\left(x^2-\frac{18}{5}x+\frac{81}{25}\right)-9=0 \\ y=m\left(x-\frac{9}{5}\right) \end{cases}$$

moltiplico per 25 la prima equazione

$$\begin{cases} 25x^2-100m^2x^2-360m^2x-324m^2-225=0 \\ y=m\left(x-\frac{9}{5}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} (25-100m^2)x^2-360m^2x-324m^2-225=0 \\ y=m\left(x-\frac{9}{5}\right) \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado ha un numero diverso di soluzioni a seconda del valore m, in una situazione di tangenza abbiamo una sola soluzione ed il discriminante è pari a zero (usiamo il discriminante in forma ridotta:.

$(180m)^2+(25-100m^2)(324m^2+225)=0 \quad (\frac{\Delta}{4}=0)$

$32400m^4+8100m^2+5625-32400m^4-22500m^2=0$

$5625-14400m^2=0$

$64m^2-225=0$

$m^2=\frac{25}{64}$

$m=\pm\frac{5}{8}$

Quindi le rette tangenti sono:

$y=\pm\frac{5}{8}\left(x-\frac{9}{5}\right)\Rightarrow \pm 8y=\ (5x-9)$

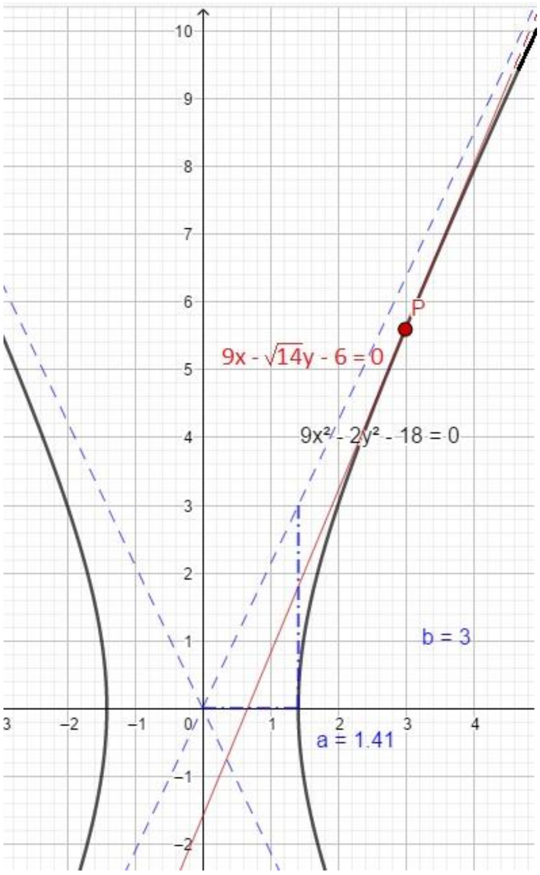
Cioè

$5x\pm 8y-9=0$.

(Soluzione : 5x-8y-9=0; 5x+8y-9=0)

4) Trova l'equazione della retta tangente all'iperbole di equazione 9x^2-2y^2-18=0 nel suo punto di ordinata 3 e ascissa positiva.

Nell'iperbole di equazione $9x^2-2y^2-18=0$ il punto di ascissa x=3 ha ordinata ricavabile sostituendo, perciò



$81-2y^2-18=0$

$63-2y^2=0$ (divido per -2)

$2y^2-63=0$

$y^2=\frac{63}{2}$

$y=\pm\sqrt{\frac{63}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{14}}{2}$ prendiamo solo l'ascissa positiva quindi

P(3; $\frac{3\sqrt{14}}{2}$)

Il fascio di rette proprio passante per P ha equazione:

$y-\frac{3\sqrt{14}}{2}=m(x-3)$

$y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2}$

Mettiamo a sistema e troviamo le intersezioni in funzione di m

$$\begin{cases} 9x^2-2y^2-18=0 \\ y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-2\left[m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2}\right]^2-18=0 \\ y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-2\left[m^2(x^2-6x+9)+3\sqrt{14}m(x-3)+\frac{63}{2}\right]-18=0 \\ y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-2m^2(x^2-6x+9)-6\sqrt{14}m(x-3)-63-18=0 \\ y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-2m^2x^2+12m^2x-18m^2-6\sqrt{14}mx+18\sqrt{14}m-81=0 \\ y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (9-2m^2)x^2+6m(2m-\sqrt{14})x-9(2m^2-2\sqrt{14}m+9)=0 \\ y=m(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado ha un numero diverso di soluzioni a seconda del valore m, in una situazione di tangenza abbiamo una sola soluzione ed il discriminante è pari a zero (usiamo il discriminante in forma ridotta):.

$[3m(2m-\sqrt{14})]^2+9(9-2m^2)((2m^2-2\sqrt{14}m+9)=0$ $\quad(\frac{\Delta}{4}=0)$

$9m^2(4m^2-4\sqrt{14}m+14)+9(18m^2-18\sqrt{14}m+81-4m^4+4\sqrt{14}m^3-18m^2)=0$

$36m^4-36\sqrt{14}m^3+126m^2+162m^2-162\sqrt{14}m+729-36m^4+36\sqrt{14}m^3-162m^2=0$

$126m^2-162\sqrt{14}m+729=0$

$14m^2-18\sqrt{14}m+81=0$

$(\sqrt{14}m-9)^2=0$

$\sqrt{14}m-9=0$

$\sqrt{14}m=9$

$m=\frac{9}{\sqrt{14}}=\frac{9\sqrt{14}}{14}$

La tangente ha equazione

$y=\frac{9\sqrt{14}}{14}(x-3)+\frac{3\sqrt{14}}{2}$

$14y=9\sqrt{14}x-27\sqrt{14}+21\sqrt{14}$

$9\sqrt{14}x-14y-6\sqrt{14}=0$

$9x-\sqrt{14}y-6=0$.