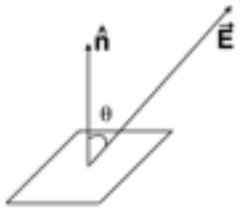
- Flusso = $E \cdot n \cdot S = |E| S \cos(\theta) = Q/e_0$
- $e_0 \approx 8.8 \cdot 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2$, $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} C$

Esercizio 1: Flusso elementare

Un campo elettrico di intensità **E=1800N/C** forma un angolo di 65 gradi con un quadrato di lato **L=3.2m**. Determinare il flusso elettrico.

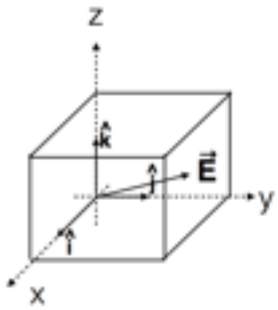


Soluzione

Flusso= $E \cdot n \cdot S = |E| S \cos(\theta) = 1800 N/C \cdot (3.2m)^2 \cdot 0.42 = 7741.44\ Nm^2/C$.

Esercizio 2: Flusso in coordinate cartesiane

Calcolare il flusso di un campo elettrico **$\underline{E}$=-3N/C$\underline{i}$+4N/C$\underline{j}$** che attraversa le facce di un cubo di lato **L=2.2m** ed il flusso totale.



Soluzione

In geometria cartesiana il prodotto scalare e' la somma dei prodotti delle coordinate.
Le coordinate del campo elettrico sono (-3N/C,4N/C,0) e le coordinate delle normali alle sei facce del cubo sono +/-$\underline{i}$=(+/-1,0,0),+/-$\underline{j}$=(0,+/-1,0),+/-$\underline{k}$=(0,0,+/-1)

Flusso faccia alta e bassa nullo perché E_z=0.
Flusso faccia alta e bassa e' nullo perché cos(θ)=0.
Flusso faccia sinistra: 4N/C(-1)(2.2m)^2= -8.8 Nm^2/C.

Flusso faccia destra: 4N/C(+1)(2.2m)^2= 8.8 Nm^2/C.

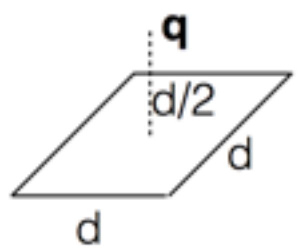
Flusso faccia avanti: -3N/C(+1)(2.2m)^2= -6.6 Nm^2/C.

Flusso faccia dietro: -3N/C(-1)(2.2m)^2= 6.6 Nm^2/C.

Il flusso totale e' nullo come si può vedere sommando i sei contributi o dal teorema di Gauss per cui la carica contenuta nella superficie chiusa (il cubo) e' nulla.

Esercizio 3:

Utilizzando il teorema di Gauss determinare il flusso elettrico che attraversa una superficie quadrata di lato **d=2m** dovuto al campo elettrico generato da una carica uniforme **Q=1.8μC** posta ad una distanza **d/2**.



Soluzione

Ad un cubo avente una faccia coincidente con la superficie aperta considerata e racchiudente la carica q soddisfa alle ipotesi del teorema di Gauss.

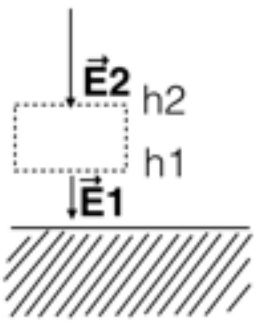
Quindi il flusso totale che attraversa il cubo e' dato da:

Flusso(cubo)= $q/e_0 = 1.8 \cdot 10^{-6} C/(8.8 \cdot 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^{2}) = 0.2 \cdot 10^{6}\, Nm^{2}/C$

ed il flusso che attraversa il quadrato e' esattamente un sesto del totale per motivi di simmetria, cioe' pari a $34 \cdot 10^{3}\, Nm^{2}/C$.

Esercizio 4: Densità di carica della atmosfera

Il campo elettrico dell'atmosfera terrestre e' verticale e diretto verso il basso. Determinare la densità di carica media della atmosfera terrestre compresa tra le due altezze di **h1=200m** e **h2=300m** sapendo che a quella altezze il campo elettrico ha una intensità pari a **E1=110N/C** e **E2=58N/C** rispettivamente.



Soluzione

Si consideri il teorema di Gauss applicato ad un parallelepipedo con due facce ad altezza h1 e h2 e superficie S.
Le uniche facce che danno contributo al flusso sono quelle poste in alto ed in basso perché' le altre quattro facce hanno la normale ortogonale al campo elettrico.
flusso faccia superiore = E2 x S = - E2 x S (Campo elettrico antiparallelo alla normale della superficie)
flusso faccia inferiore = E1 x S = E1 x S (Campo elettrico parallelo alla normale della superficie)
flusso totale = $(E1-E2)S = Q/e_0 = V\rho/e_0 = Sh\rho/e_0 = S(h2-h1)\rho/e_0$

dove Q è la carica totale contenuta nel volume V=Sh=S(h2-h1) e ρ e' la densità di carica media.

Quindi $\rho = e_0(E1-E2)/(h1-h2) = 8.8 \cdot 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^{2} (110-58) NC^{-1} / [(200-100)m]$

$= 8.8 \cdot 52 \cdot 100 \cdot 10^{-12} Cm^{-3} = 46 \cdot 10^{-9} Cm^{-3} = 46 \cdot nCm^{-3}$.

Esercizio 5: Campo elettrico di una sfera carica in un guscio conduttivo

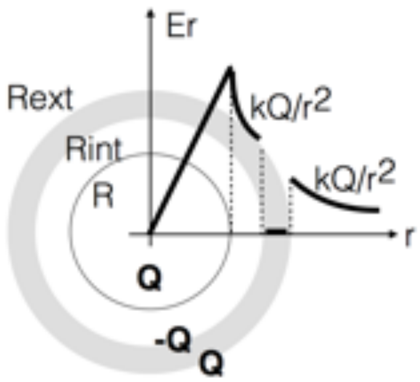
Una sfera di raggio ***R*=1cm** e carica ***Qsfera*=4.2·10^{-6}C** è circondata da un guscio conduttore scarico concentrico di raggio interno ***Rint*=1.2cm** e raggio esterno di ***Rext*=1.5cm**.

a)Determinare l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza dal centro della sfera.

b)Come cambierebbe il campo se il guscio sferico avesse una carica pari a ***Qsfera/3***?

c)Calcolare il campo ai bordi delle tre superfici sferiche ed a r=R/2 nella sfera.

d)Determinare il periodo di oscillazione di una carica puntiforme ***q*=-10^{-6}C** e massa ***m*=1g**.



Soluzione

a) Il problema e' a simmetria sferica e quindi si puo' sfruttare il teorema di Gauss applicato a superfici sferiche concentriche.

All'interno della sfera ad una distanza r il campo elettrico e' determinato solo dalla carica contenuta nella sfera di raggio r che e' pari a

$Q(r)=Qsfera\ V(r)/Vsfera= Qsfera\ r^3/R^3$

quindi il campo elettrico, essendo parallelo alla normale della superficie sferica, e' pari a:

$E(r)\ S(r)=flusso= Q(r)/e_0$

$E(r)= Q(r)/(e_0S(r))= 1/e_0Qsfera\ r^3/R^3/(4\pi r^2)= 1/e_0Qsfera\ r^3/R^3/(4\pi r^2)$

$E(r)= kQsfera\ r/R^3$.

Tra la sfera ed il guscio la carica contenuta dalla superficie sferica rimane pari a Qsfera e quindi

$E(r)\ S(r) = \text{flusso} = Qsfera/e_0$

$E(r) = Qsfera/(e_0 S(r)) = 1/e_0 Qsfera\ /(4\pi r^2) = k\ Qsfera/r^2$

cioe' come se la carica fosse concentrata in un punto.

Nel guscio il campo elettrico e' nullo perché e' conduttore e questo determina una carica indotta pari a -Qsfera sulla superficie interna al fine di non violare il teorema di Gauss (flusso=0 implica Qsfera+Qint=0 quindi Qint=-Qsfera).
Siccome il guscio e' neutro ed il campo elettrico e' nullo al suo interno deve nascere una carica indotta +Qsfera sulla superficie esterna Qext=-Qint=Qsfera.
All'esterno del guscio la carica contenuta e' di nuova Qsfera+Qint+Qext=Qsfera e quindi il campo elettrico e' di nuovo uguale a quello che si avrebbe nel caso ci sono solo una carica puntiforme Qsfera nel centro.

b)
Deve valere Qint+Qext=Qsfera/3
Il campo elettrico nel guscio conduttore deve essere sempre nullo e quindi la carica indotta sulla superficie interna non può' cambiare rispetto a prima sempre per il teorema di Gauss Qint=-Qsfera.
Quindi la carica esterna indotta e' pari a Qext=4/3Qsfera.
c)

$E(R) = 9 \cdot 10^9 Nm^2 C^{-2}\ 4.2 \cdot 10^{-6} C/(0.01m)^2 = 9 \cdot 4.2 \cdot 10^7 N/C = 3.8 \cdot 10^8 N/C$

$E(Rint) = E(R)(R/Rint)^2 = 3.8 \cdot 10^8 N/C/1.2^2 = 2.6 \cdot 10^8 N/C$

$E(Rext) = E(R)(R/Rext)^2 = 3.8 \cdot 10^8 N/C/1.5^2 = 1.7 \cdot 10^8 N/C$
$E(R/2) = E(R)(R/2)/R = E(R)/2 = 1.9 \cdot 10^8 N/C$

d)La intensità dell forza elettrica è data da:

$F(r) = E \times |q| = kQsfera\ |q|\ r/R^3$ ed e' una forza di richiamo verso il centro essendo q negativa e dipende in modo proporzionale dalla distanza.
Nel caso dela molla l'espressione e' F=Kr e la frequenza di oscillazione e' pari a $f = sqrt(K/m)/(2\pi)$ e quindi nel nostro caso $K = kQsfera\ |q|/R^3$ e

$f = sqrt[kQsfera\ |q|/(R^3 m)]/(2\pi)$

$=0.16 \text{ x sqrt}(9 \cdot 10^9 Nm^2 C^{-2}\ 4.2 \cdot 10^{-6} C\ \cdot 10^{-6} C\ /\ (10^{-6}\ m^3 0.001Kg))$

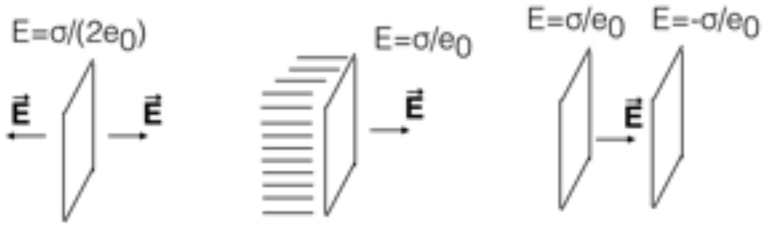
$=0.16 \text{xsqrt}(9 \text{x} 4.2 \text{x} 10^{9-6-6+9} Nm/Kg)=0.16 \text{ x sqrt}(9 \text{ x } 4.2 \text{ x } 10^6 Nm/N * m\ s^{-2})=$

$=0.16 \text{ x } 3 \text{ x } 10^6 \text{ sqrt}(4.2)\ s^{-1}$

$=0.98 \text{ x } 10^6\ s^{-1} = 0.98 \text{ x } 10^6\ Hz = 0.98MHz.$

Esercizio 6: Campo elettrico di un condensatore piano

Determinare il campo elettrico generato da un condensatore piano infinito nel vuoto con le due armature distanti ***d*** e con densità superficiale di carica pari a ***σ*=4.2·10^{-6}C/cm2** e ***σ*=-4.2·10^{-6}C/cm2** . Come sarebbe il campo nello spazio se una armatura invadesse tutto il suo semispazio?



Soluzione

Consideriamo un piano uniformemente carico con densità σ. Il flusso elettrico non nullo sulle superfici di un cilindro ortogonale al piano e' solo quello delle basi essendo la normale alla superficie laterale ortogonale al capo elettrico per motivi di simmetria.

Quindi dal teorema di Gauss applicato al cilindro avremo:

flusso=2ES=Q/e_0 dove il fattore 2 tiene conto di entrambi le basi dove il flusso ha lo stesso segno anche se il campo ha segno opposto.

E=Q/(2Se_0)=σ/(2e_0).

Nel caso di due armature cariche dovremo sommare i due campi generati facendo attenzione al valore ed alla direzione del campo nei tre diversi volumi. Risulta che fuori dal condensatore i campi si annullano, mentre all'interno si sommano e quindi Econdensatore=σ/e_0=

=$4.2\cdot10^{-6}$C·cm^{-2}/($8.8\cdot10^{-12}$N^{-1}m^{-2}C^{2})=$0.48\cdot10^{2}$N/C.

Osserviamo che in tale circostanza il campo è uniforme nello spazio tra piani uniformemente carichi.

Esercizio 5: Forza elettrica di un filo carico su una barretta.

Determinare la forza elettrica esercitata da un filo uniformemente carico con densità lineare di carica **λ=1.2·10^{-6}C/cm** e **σ=-4.2·10^{-6}C/cm2**. su una barretta di carica **q=3.2·10^{-6}C**. e posta ad una distanza **d=5.2·cm.**

Soluzione

Dal teorema di Gauss applicato ad un cilindro di altezza h e raggio d concentrico con il filo avremo un flusso non nullo solo sulla superficie laterale:

flusso=$2\pi dhE=Q/e_0=\lambda h/e_0$

$E=\lambda/(e_0 2\pi d)=2k\lambda/d$.

La forza elettrica e' $F=qE=2k\lambda q/d$.