Simulazione di II prova - Matematica e Fisica

Classe V Sezione T

Soluzione

Risolvi uno dei due problemi.

1. Barretta energetica. Una barretta conduttrice PQ orizzontale di massa m, lunghezza l e resistenza trascurabile è inizialmente ferma e viene lasciata cadere all'istante $t=0$. Essa cade in una regione dello spazio che è sede di un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, orizzontale e perpendicolare alla barretta, con verso riportato nella Figura 1.

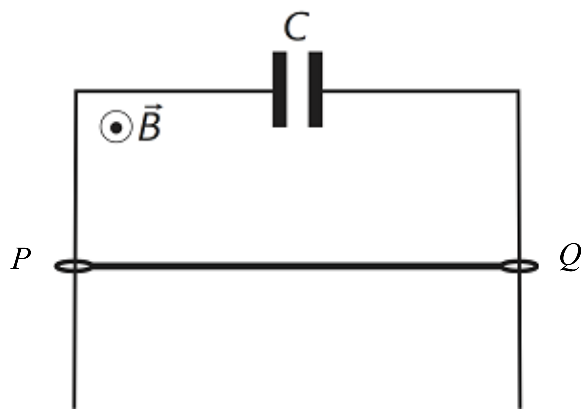


Figura 1.

La caduta della barretta è guidata da due fili conduttori verticali, di resistenza trascurabile; le forze di attrito sono trascurabili, nonostante la barretta sia in contatto costante con i fili conduttori e le estremità superiori dei due fili siano collegate alle armature di un condensatore di capacità C.

i. Rappresenta il diagramma delle forze che agiscono sulla barretta. Detta $\vec{v}$ la velocità della barretta al tempo t, esprimi in funzione di B, l, v e C la carica q del condensatore che si suppone inizialmente scarico. Deduci l'espressione dell'intensità i della corrente che scorre nella barretta all'istante t.

ii. Verifica che il modulo dell'accelerazione della barra è

$$a=\frac{m}{m+Cl^2B^2}g$$

e che il prodotto Cl^2B^2 equivale a una massa. Che cosa si può concludere sulla corrente che in essa circola?

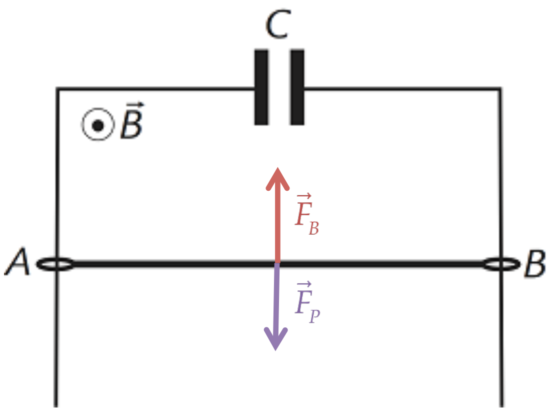
Supponiamo d'ora in poi che $B=0{,}40\ T$, $l=PQ=0{,}50\ m$, $C=4{,}0\ mF$ e $m=20\ g$.

iii. Se l'intensità del campo magnetico raddoppia, qual è la variazione percentuale dell'accelerazione?

iv. Studia la funzione che esprime l'accelerazione della barretta in funzione dell'intensità del campo magnetico B e rappresentane il grafico. Per quale valore di B la variazione dell'accelerazione è massima? Se la lunghezza della corsa della barretta è $h = 1{,}6\ m$, quanta carica si deposita sulle armature del condensatore?

Risposta.

i. Rappresenta il diagramma delle forze che agiscono sulla barretta. Detta $\vec{v}$ la velocità della barretta al tempo t, esprimi in funzione di B, l, v e C la carica q del condensatore che si suppone inizialmente scarico. Deduci l'espressione dell'intensità i della corrente che scorre nella barretta all'istante t.



Sulla barra agiscono due forze: la forza peso che spinge la barretta verso il basso, di modulo $F_p = mg$; la forza dovuta all'effetto induttivo, esplicitabile tramite la relazione di Laplace $\vec{F}_B = i(t)\vec{l} \times \vec{B}$, di modulo $F_B = Bi(t)l$.

Ai capi del condensatore si forma una *ddp* ΔV pari alla *fem* indotta: $fem(t) = -\dfrac{d\phi_B(t)}{dt}$ (Legge di Faraday-Lenz).
Per definizione di capacità, $q(t) = C \cdot \Delta V \rightarrow q(t) = C \cdot fem(t)$.

Mettendo assieme i due risultati trovo che $q(t) = -C\dfrac{d\phi_B(t)}{dt}$. Ora, $\phi_B(t) = Blx(t)$, quindi $q(t) = -CBl\dfrac{dx(t)}{dt} \rightarrow q(t) = -CBlv(t)$.

Poiché per definizione di intensità di corrente elettrica $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$, ottengo che $i(t) = -CBl\dfrac{dv(t)}{dt} \rightarrow i(t) = -CBla(t)$, dove $a(t)$ rappresenta l'accelerazione istantanea della barretta.

ii. Verifica che il modulo dell'accelerazione della barra è

$$a = \frac{m}{m + Cl^2B^2} g$$

e che il prodotto Cl^2B^2 equivale a una massa. Che cosa si può concludere sulla corrente che in essa circola?

Per il secondo principio della dinamica applicato alla barretta si ha:

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_B \rightarrow F = F_P - F_B \rightarrow ma(t) = mg - Bi(t)l \rightarrow ma(t) = mg - CB^2l^2a(t) \rightarrow a(t) = \frac{m}{m + CB^2l^2} g \,.$$

Ora, l'unità di misura della capacità nel SI è $\left[F = \frac{C}{V} = \frac{C}{J/C} = \frac{C^2}{J} = \frac{A^2s^2}{Nm} = \frac{A^2s^2}{kg{\cdot}m/s^2\, m} = \frac{A^2s^4}{kg{\cdot}m^2}\right]$;

l'unità di misura di l^2 è $\left[m^2\right]$; l'unità di misura di B^2 è $\left[T^2 = \frac{N^2}{C^2\, m^2/s^2} = \frac{kg^2\, m^2/s^4}{A^2s^2\, m^2/s^2} = \frac{kg^2}{A^2s^4}\right]$;

quindi Cl^2B^2 $\left[\frac{A^2s^4}{kgm^2} m^2 \frac{kg^2}{A^2s^4} = kg\right]$.

Infine, $i(t) = -CBla(t) \rightarrow i(t) = -\frac{CBlm}{m + CB^2l^2} g$, ovvero l'intensità di corrente è costante.

iii. Se l'intensità del campo magnetico raddoppia, qual è la variazione percentuale dell'accelerazione?

Sia $B_r = 2B$. Allora $a_r(t) = \frac{m}{m + CB_r^2l^2} g = \frac{m}{m + 4CB^2l^2} g$, quindi ottengo che

$$\Delta a\% = \frac{a_r(t) - a(t)}{a(t)} \cdot 100 = \frac{-3CB^2l^2}{m + 4CB^2l^2} 100 = \frac{-3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}5^2}{2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}5^2} 100 = -\frac{100}{43} \simeq -2{,}33\% \,.$$

iv. Studia la funzione che esprime l'accelerazione della barretta in funzione dell'intensità del campo magnetico B e rappresentane il grafico. Per quale valore di B la variazione dell'accelerazione è massima? Se la lunghezza della corsa della barretta è $h = 1{,}6\ m$, quanta carica si deposita sulle armature del condensatore?

Inserendo i dati ($g = 10\ m/s^2$) ho che $a(B) = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} B^2 \cdot 0{,}5^2} 10 \rightarrow a(B) = \frac{200}{20 + B^2}$.

· dominio: $D = \mathbb{R}$.

· parità: $a(-B) = a(B),\ \forall B \in \mathbb{R}$; la funzione è pari.

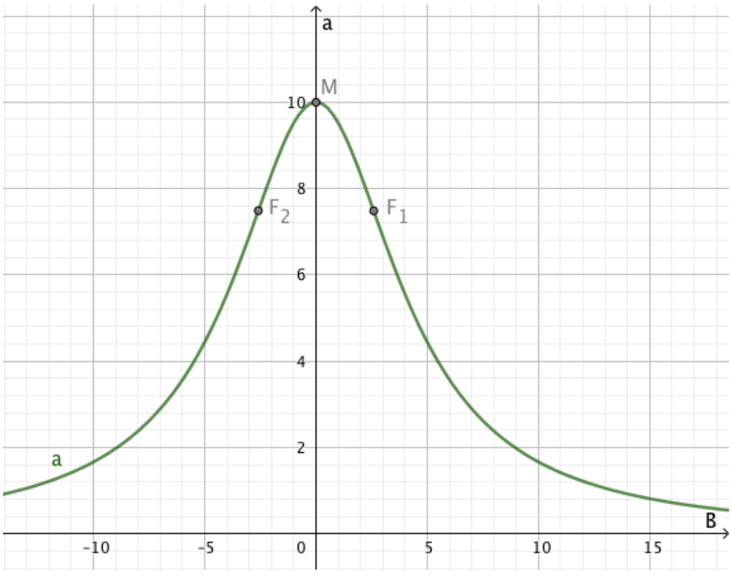
· segno di $a(B)$: $a(B) > 0,\ \forall B \in \mathbb{R}$.

· limiti significativi ed eventuali asintoti: $\lim_{B \to \pm\infty} a(B) = 0 \rightarrow a_o : y = 0$.

· crescenza di $a(B)$: $a'(B) = -\frac{400B}{\left(20 + B^2\right)^2} \geq 0 \rightarrow B \leq 0$, ovvero la funzione è crescente per $B < 0$ e ammette un punto di massimo (assoluto) $M(0;\ 10)$.

· convessità di $a(B)$: $a''(B)=400\dfrac{3B^2-20}{\left(20+B^2\right)^3}\geq 0 \rightarrow B\leq -\dfrac{2}{3}\sqrt{15}\vee B\geq \dfrac{2}{3}\sqrt{15}$, ovvero la funzione è convessa per $B<-\dfrac{2}{3}\sqrt{15}\vee B>\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$ e ammette due punti di flesso (a tangente obliqua) $F\left(\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{15};\ \dfrac{15}{2}\right)$.

· grafico di $a(B)$:



Osservo che in assenza di campo magnetico la barretta scende con accelerazione pari all'accelerazione di gravità, ovvero non è presente nessuna forza frenante.
Chiaramente il grafico ha senso fisico per $B\geq 0$.

La variazione di accelerazione massima si ha quando è massimo $a'(B)$, ovvero per $B=\dfrac{2}{3}\sqrt{15}\simeq 2{,}6\ T$.

Il moto della barretta è rettilineo uniformemente accelerato, quindi le leggi orarie del moto sono $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{2}at^2 \\ v(t)=at \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t)=\dfrac{625}{126}t^2 \\ v(t)=\dfrac{625}{63}t \end{cases}$, da cui, ponendo $x(t)=1{,}6\ m$, $v\left(\dfrac{12}{125}\sqrt{35}\right)=\dfrac{60}{63}\sqrt{35}$.

Dunque la carica immagazzinata nel condensatore sarà $q\left(\dfrac{12}{125}\sqrt{35}\right)=-4\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot\dfrac{60}{63}\sqrt{35}=-\dfrac{2}{2625}\sqrt{35}\simeq -4{,}5\ mC$.

2. Un vortice nel tè. Tutti abbiamo osservato che cosa accade quando si mescola lo zucchero nel tè con un cucchiaino: tanto più veloce si mescola, tanto più in alto verso il bordo della tazza sale il liquido.
   Proviamo a chiederci il perché e per farlo consideriamo un esperimento più preciso. Prendiamo un bicchiere di forma cilindrica, riempito a metà circa di acqua colorata, lo poniamo nel centro di una centrifuga, che mettiamo in moto uniforme attorno all'asse di rotazione (asse verticale).

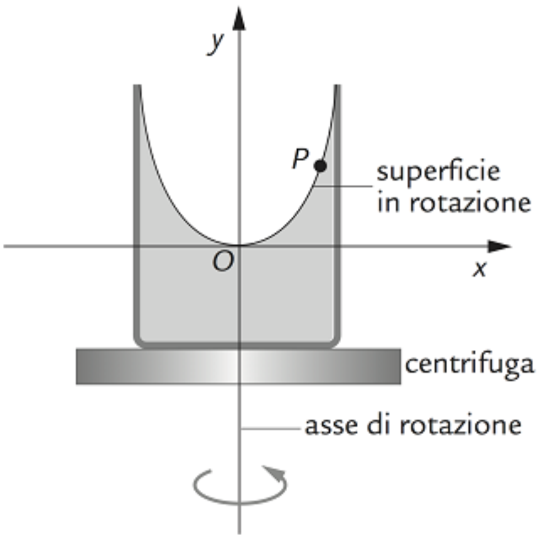


Figura 2.

Osserviamo che (Figura 2):

- al centro del bicchiere in rotazione l'acqua si abbassa, mentre la circonferenza (sul bordo) si alza;
- se la velocità di rotazione aumenta, l'acqua al bordo sale di più e quella al centro scende ulteriormente.

Ci chiediamo quale sia la forma della cavità quando la centrifuga ruota a velocità (angolare) costante.
La superficie della cavità può essere considerata come una superficie di rotazione generata dal bordo ricurvo di una qualunque sezione ottenuta mediante un piano verticale passante per l'asse di rotazione. Il problema diventa quindi quello di determinare l'equazione $y = f(x)$ della curva che genera la superficie.
(Trascura la tensione superficiale e supponi che la superficie di un fluido in quiete giaccia interamente in un piano orizzontale.)
Introduciamo un sistema di riferimento che, per semplicità, ha asse verticale coincidente con l'asse di rotazione e asse orizzontale passante per il centro della cavità (come in Figura 2). Consideriamo ora una particella del fluido di massa m, in rotazione in prossimità della superficie libera, situata nel punto $P(x; y)$. Questa particella ruota uniformemente, descrivendo una circonferenza orizzontale con velocità angolare costante.
È naturale supporre che la forza centripeta sia la risultante delle due forze che agiscono sulla particella di fluido considerata: la forza di gravità $\vec{F}_G$, diretta verticalmente verso il basso, e la reazione risultante $\vec{R}$, perpendicolare alla superficie libera.

   i. Rappresenta il diagramma delle forze che agiscono sulla porzione di fluido di massa m e dimostra che la tangente dell'angolo α, formato dall'asse x e dalla retta tangente alla curva (che genera la superficie) in P è $\tan\alpha = v^2/(gx)$ (v indica la velocità tangenziale, g l'accelerazione di gravità).

ii. Dimostra che la funzione $f(x)$ cercata soddisfa l'uguaglianza $f'(x) = \omega^2 x/g$.

Se la velocità di rotazione supera un certo valore, il fluido uscirà dal contenitore. Ovviamente tale valore dipenderà dalle caratteristiche del contenitore e dalla quantità di liquido. Considera ora la situazione descritta in Figura 3, in cui il bicchiere ha raggio di base 4 cm e altezza 9 cm e la velocità angolare è $\omega = 20\ rad/s$.

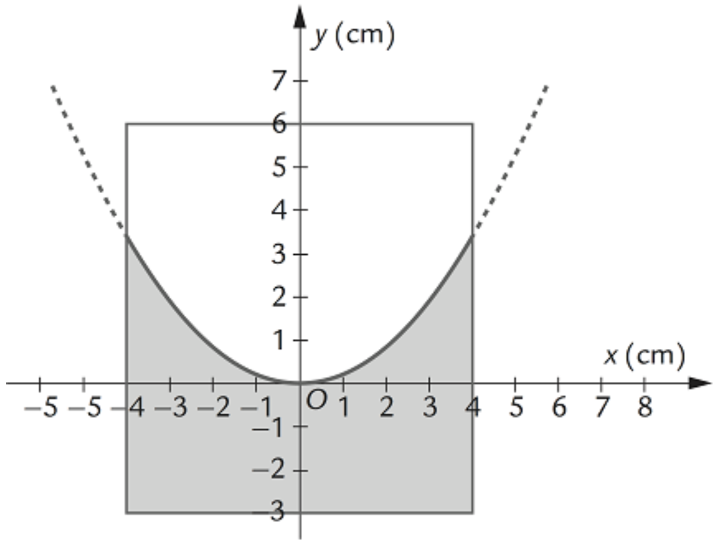


Figura 3.

iii. Determina l'espressione analitica di $f(x)$, approssimando g a $10\ m/s^2$ e ponendo particolare attenzione all'unità di misura utilizzata per x, la distanza dall'asse di rotazione, che deve essere in centimetri. Verifica che il fluido effettivamente non trabocca.

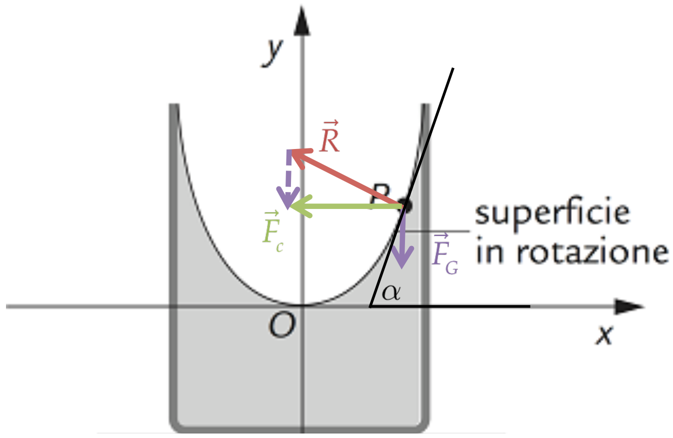
iv. Calcola il volume del liquido contenuto nel bicchiere e il livello che esso raggiunge quando il sistema è in quiete (il volume di un paraboloide (il solido generato dalla rotazione di 180° di una parabola attorno al proprio asse) è pari a metà del volume del cilindro che lo circoscrive).

Risposta.

i. Rappresenta il diagramma delle forze che agiscono sulla porzione di fluido di massa m e dimostra che la tangente dell'angolo α, formato dall'asse x e dalla retta tangente alla curva (che genera la superficie) in P è $\tan\alpha = v^2/(gx)$ (v indica la velocità tangenziale, g l'accelerazione di gravità).

In riferimento alla figura sottostante, la forza centripeta (di modulo $F_c = mv^2/x$, x rappresenta il raggio della circonferenza) è la risultante della reazione $\vec{R}$ con la forza peso $\vec{F}_G$ (di modulo $F_G = mg$).

Il triangolo formato dai tre vettori ha un angolo congruente ad α (quello formato dai vettori $\vec{R}$ ed $\vec{F}_G$, vettori perpendicolari ai lati dell'angolo α), perciò $\tan\alpha = F_c/F_G$ $\rightarrow \tan\alpha = v^2/(gx)$.



ii. Dimostra che la funzione $f(x)$ cercata soddisfa l'uguaglianza $f'(x) = \omega^2 x/g$.

La tangente dell'angolo che la retta tangente al grafico di *f* forma con l'asse *x* coincide con il coefficiente angolare della tangente, ovvero con la derivata prima di *f* calcolata in *x*, $f'(x)$.

Dal punto i. ho provato che $\tan\alpha = \dfrac{v^2}{gx}$ e, per quanto appena detto, $f'(x) = \dfrac{v^2}{gx}$. Poiché $v = \omega x$, ho che $f'(x) = \dfrac{\omega^2 x}{g}$.

iii. Determina l'espressione analitica di $f(x)$, approssimando g a $10\ m/s^2$ e ponendo particolare attenzione all'unità di misura utilizzata per *x*, la distanza dall'asse di rotazione, che deve essere in centimetri. Verifica che il fluido effettivamente non trabocca.

La funzione *f* sarà una primitiva di f', ovvero $f(x) = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2 + k$ per un opportuno $k \in \mathbb{R}$.

Noto dal grafico che $f(0) = 0$, per cui $0 = \dfrac{\omega^2}{2g}0^2 + k \rightarrow k = 0$, ovvero $f(x) = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$. Sostituendo i valori dati, $\omega = 20\ rad/s$ e $g = 1000\ cm/s^2$, ottengo $f(x) = \dfrac{x^2}{5}$, *x* espresso in *cm*.

Per verificare che il fluido non trabocca, basta verificare che $f(4) \leq 6$: $f(4) = 16/5 = 3{,}2\ cm \leq 6\ cm$.

iv. Calcola il volume del liquido contenuto nel bicchiere e il livello che esso raggiunge quando il sistema è in quiete (il volume di un paraboloide (il solido generato dalla rotazione di 180° di una parabola attorno al proprio asse) è pari a $1/6$ del volume del cilindro che lo circoscrive).

Il volume del liquido è pari al volume del cilindro sotto l'asse x più la differenza del volume del cilindro sopra l'asse x di altezza 3,2 cm con il volume del paraboloide.
Il volume del cilindro sotto l'asse x vale $\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi\ cm^3$; il volume del cilindro sopra l'asse x di altezza 3,2 cm vale $\pi \cdot 4^2 \cdot 3{,}2 = \frac{256}{5}\pi\ cm^3$; essendo il volume del paraboloide $1/6$ del volume di tale cilindro, il volume di fluido sopra l'asse x sarà $\frac{128}{3}\pi\ cm^3$.

Quindi $V = \frac{272}{3}\pi\ cm^3$.

In quiete raggiungerà il livello h tale che $\pi 4^2 (h+3) = \frac{272}{3}\pi \to h = \frac{8}{3}\ cm = 2{,}\overline{6}\ cm$, ovvero dal fondo del bicchiere di circa 5,6 cm.

Risolvi quattro degli otto quesiti.

1. Due punti materiali P e Q partono nell'istante $t=0$ dall'origine O di un sistema di riferimento cartesiano e si muovono sull'asse x e sull'asse y, rispettivamente con leggi orarie $s_P(t)=e^t-1$ e $s_Q(t)=t^3$. Determina la legge oraria del moto di allontanamento dei due punti e calcola il limite della velocità di allontanamento per t che tende a 0^+.

Risposta.
Per determinare di quanto si allontana un punto dall'altro basta applicare il Teorema di Pitagora al triangolo OPQ: $s(t)=\overline{PQ}=\sqrt{\left(e^t-1\right)^2+t^6}$. La velocità di allontanamento è $v(t)=s'(t)=\dfrac{e^t\left(e^t-1\right)+3t^5}{\sqrt{\left(e^t-1\right)^2+t^6}}$, per cui $\lim\limits_{t\to0^+}v(t)=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{*}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t\dfrac{e^t-1}{t}+3t^4}{\sqrt{\left(\dfrac{e^t-1}{t}\right)^2+t^4}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t+3t^4}{\sqrt{1+t^4}}=1$, dove in * ho diviso numeratore e denominatore per t così da ottenere il limite notevole $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

2. Un punto materiale si muove lungo una retta con legge oraria:

$$s(t)=t^2-2t^3+8\ln(t+1),$$

con $t\geq 0$ misurato in secondi.
   i. Verifica che esiste un unico punto di stazionarietà t_S e che tale punto è un punto di inversione, cioè un punto in cui la velocità cambia verso.
   ii. Verifica che il punto materiale parte dall'origine del sistema di riferimento e ritorna in tale posizione in un unico istante $\tilde{t}>0$ e calcola tale tempo approssimando il suo valore a meno di $1/10$.

Risposta.

i. $s'(t)=2t-6t^2+\dfrac{8}{t+1}\rightarrow s'(t)=2\dfrac{-3t^3-2t^2+t+4}{t+1}\rightarrow s'(t)=\dfrac{2(1-t)\left(3t^2+5t+4\right)}{t+1}$ e la derivata prima di s si annulla solo per $t_S=1\,s$. In tale punto la velocità cambia verso, infatti $v(t)=s'(t)>0$ per $t<t_S$ e $v(t)<0$ per $t>t_S$.

ii. Basta verificare che la funzione s ammette un unico zero positivo. A tal fine applico il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione s in $[1;\ 2]$: poiché ivi la funzione è continua e $s(1)\cdot s(2)=(-1+8\ln2)(-12+8\ln3)<0$, la funzione ammette almeno uno zero all'interno di tale intervallo. Tale zero è unico in quanto all'interno di questo intervallo la funzione è strettamente decrescente. Per trovare il valore di tale zero approssimato al decimo, utilizzo il metodo di bisezione: $s(1{,}5)\simeq2{,}83$, $s(1{,}75)\simeq0{,}44$, $s(1{,}8)\simeq-0{,}19$; quindi $\tilde{t}\simeq1{,}7$.

3. Il raggio r di un pallone gonfiabile sferico aumenta secondo la ge $r(t)=r_0\left(2-e^{-2t}\right)$ per $t\geq 0$, con r_0 costante reale positiva, t misurato in secondi ed r in centimetri. Calcola la velocità con cui cresce il volume del pallone nell'istante $t=0$ e nell'istante in cui r assume il valore $3/2\,r_0$.

Risposta.

Il volume del pallone all'istante t è $V(t)=\dfrac{4}{3}\pi r^3(t)\rightarrow V(t)=\dfrac{4}{3}\pi r_0^3\left(2-e^{-2t}\right)^3$.

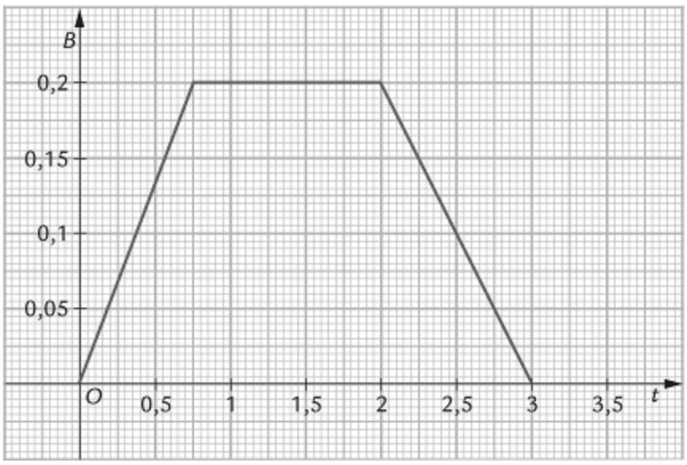
La velocità con cui cresce il volume del pallone all'istante t è $V'(t)=8\pi r_0^3e^{-2t}\left(2-e^{-2t}\right)^2$.
Dunque $V'(0)=8\pi r_0^3$.

L'istante di tempo t nel quale $r(t)=\dfrac{3}{2}r_0$ si trova risolvendo l'equazione $\dfrac{3}{2}r_0=r_0\left(2-e^{-2t}\right)\rightarrow$

$\rightarrow e^{-2t}=\dfrac{1}{2}\rightarrow -2t=-\ln 2\rightarrow t=\dfrac{\ln 2}{2}$. Dunque $V'\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=8\pi r_0^3\,\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2=9\pi r_0^3$.

4. Una bobina quadrata di lato $l=4{,}0\ cm$ è costituita da 50 spire; essa è disposta verticalmente in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ orizzontale e perpendicolare al piano delle spire della bobina. La resistenza della bobina è $R=4{,}0\ \Omega$.

   i. Si fa variare l'intensità B del campo magnetico secondo la curva del grafico in figura.



   Scrivi la funzione che esprime la corrente indotta nell'intervallo di tempo $[0;\ 3\ s]$.

   ii. Supponi ora che il campo magnetico $\vec{B}$ vari secondo una legge sinusoidale con frequenza f di $550\ Hz$. Sapendo che il valore massimo di $\vec{B}$ è $0{,}1\ T$ e che all'istante $t=0$ il campo è nullo, scrivi la legge di B in funzione del tempo e quella della corrente indotta. Quali considerazioni puoi fare sul risultato ottenuto?

Risposta.

i. $i(t)=-\frac{1}{R}fem(t)=-\frac{N}{R}\frac{d\phi_B}{dt}=-\frac{Nl^2}{R}\frac{dB(t)}{dt}=-\frac{1}{50}\frac{dB(t)}{dt}$. L'espressione analitica di B la ricavo agevolmente dal grafico:

$$B(t)=\begin{cases}\frac{4}{15}t & \text{se } 0\le t<0{,}75\ s\\ \frac{1}{5} & \text{se } 0{,}75\ s\le t<2\ s\\ -\frac{1}{5}(t-3) & \text{se } 2\ s\le t\le 3\ s\end{cases};$$

Dunque:

$$i(t)=\begin{cases}-5{,}\overline{3}\ mA & \text{se } 0<t<0{,}75\ s\\ 0 & \text{se } 0{,}75\ s<t<2\ s\\ 4\ mA & \text{se } 2\ s<t<3\ s\end{cases}.$$

ii. $B(t)=0{,}1\cdot\sin(1100\pi t)$ soddisfa i requisiti richiesti. Ho che $i(t)=-220\pi\cos(1100\pi t)$. Osservo che nel punto precedente l'intensità di corrente elettrica assume valori sull'ordine di grandezza dei *mA*, mentre in questo punto l'intensità massima è sull'ordine di grandezza dei *kA*; questo si spiega vista l'elevata frequenza con la quale varia *B*, che porta a un alto valore della *fem* indotta, direttamente proporzionale all'intensità di corrente elettrica indotta.

5. All'interno di un acceleratore viene condotto un esperimento lanciando una contro l'altra due particelle aventi velocità $v_1=2{,}25\cdot10^8\ m/s$ e $v_2=1{,}80\cdot10^8\ m/s$. Calcola la velocità che ha la seconda particella nel sistema di riferimento solidale con la prima.

Risposta.
Visto che le velocità non sono trascurabili rispetto alla velocità della luce *c*, devo trattare il problema in modo relativistico. La legge di composizione delle velocità relativistica è $u'=\frac{v-u}{1-vu/c^2}$, dove $v=v_1$ è il modulo della velocità del sistema di riferimento solidale con la prima particella, $u=v_2$ è la velocità della seconda particella vista da un osservatore a terra e u' è la velocità della seconda particella vista da un osservatore posto sulla prima particella. Quindi $u'=\frac{2{,}25\cdot10^8-1{,}8\cdot10^8}{1-1{,}8\cdot10^8\cdot2{,}25\cdot10^8/(8{,}99\cdot10^{16})}=8{,}18\cdot10^7\ m/s$.

6. Data la funzione $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x-2}$, con $a,b\in\mathbb{R}$, determina i valori da assegnare ai parametri affinché il grafico abbia un asintoto di equazione $y=x-2$. Prova che il grafico di *f* ammette come punto di simmetria l'intersezione degli asintoti.

Risposta.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\rightarrow a=1$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=-2\rightarrow b+2a=-2\rightarrow b=-4$.

Dunque $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$. Oltre all'asintoto obliquo la funzione ammette un asintoto verticale di equazione $x=2$. Il punto di simmetria è il punto di intersezione dei due asintoti, ovvero il punto $S(2;\ 0)$. Provo che tale punto è punto di simmetria per il grafico di *f*:

$$\sigma_S:\begin{cases}x'=4-x\\ y'=-y\end{cases},$$

$y=f(x)\xrightarrow{\sigma_S}y'=f(x')$, ovvero $-y=f(4-x)\rightarrow -y=\dfrac{(4-x)^2-4(4-x)}{(4-x)-2}\rightarrow y=-\dfrac{-4x+x^2}{2-x}\rightarrow$

$\rightarrow y=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$.

Un altro modo per vedere che *S* è punto di simmetria per il grafico di *f* è traslare il grafico di un vettore $\vec{\tau}(-2;\ 0)$ e provare che la funzione traslata è dispari:

$$\tau:\begin{cases}x'=x+2\\ y'=y\end{cases},$$

$y=f(x)\xrightarrow{\tau}y'=f(x')$, ovvero $y=f(x+2)\rightarrow y=\dfrac{(x+2)^2-4(x+2)}{(x+2)-2}\rightarrow y=\dfrac{x^2-4}{x}$ e tale funzione è dispari: $\dfrac{(-x)^2-4}{-x}=-\dfrac{x^2-4}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

7. Dimostra che il grafico della funzione $f(x)=20x^3-33x^2-36x$ non interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti interni all'intervallo $[2;\ 3]$.

Risposta.
<u>I metodo</u>. Per il Teorema fondamentale dell'algebra la funzione data ammette al massimo tre zeri in $\mathbb{R}$. Poiché $f(x)=x(5x-12)(4x+3)$, gli zeri sono proprio tre: $x=-3/4$, $x=0$ e $x=12/5=2{,}4\in[2;\ 3]$.

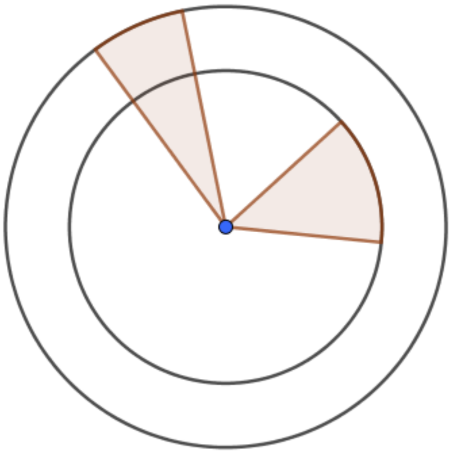
<u>II metodo</u>. Applico il Teorema di esistenza degli zeri a *f* nell'intervallo dato: poiché *f* è continua in quanto polinomiale e $f(3)\cdot f(2)=-5940<0$, la funzione ammette almeno uno zero all'interno di $[2;\ 3]$. Poiché $f'(x)=6(5x+2)(2x-3)\geq 0\rightarrow x\leq -2/5\vee x\geq 3/2$, la funzione risulta essere crescente nell'intervallo dato, ovvero ivi lo zero è unico.

8. Fra tutti i settori circolari di perimetro fissato pari a p, stabilisci qual è quello di area massima. Calcola il valore di tale area massima.

Risposta.
Considero un settore circolare di perimetro $p = 2r + a$, dove r indica il raggio della circonferenza e a la lunghezza dell'arco. Allora $a = p - 2r$ e l'area del settore circolare sarà una funzione dipendente dal raggio:

$$A = \frac{a \cdot r}{2} \to A(r) = \frac{r(p-2r)}{2} \to A(r) = -r^2 + \frac{p}{2} r .$$

Essendo una funzione polinomiale di secondo grado con coefficiente direttivo negativo, la funzione ammette un massimo in corrispondenza del vertice: $r = p/4$, corrispondente all'area $A(p/4) = p^2/16$.



Esempio di due settori circolari di perimetro p.

NOTE:

i. Tempo a disposizione: 5 ore (300 minuti). È possibile uscire dall'aula solo quando sono trascorse 2,5 ore (150 minuti) dall'inizio della simulazione.

ii. È ammesso l'uso della calcolatrice in accordo con l'allegato alla nota MIUR n. 5641 del 30 marzo 2018.

iii. Punteggio massimo 20 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***12 p.ti***.