Un teorema sui quadrilateri bicentrici

gabo

Preambolo

Volevo condividere questo teorema che sono riuscito a dimostrare questa domenica. È un teorema molto sconosciuto - credo -, del quale non riesco a trovare neanche il nome (quindi non riesco a trovarne neanche una dimostrazione). Questa è la dimostrazione più semplice che sono riuscito a creare.

Enunciato

In un qualsiasi quadrilatero bicentrico inscritto in una circonferenza di raggio R e circoscritto a una circonferenza di raggio r, sussiste la seguente disuguaglianza:

$$R \geq r\sqrt{2}$$

Dimostrazione

Sia $ABCD$ un quadrilatero bicentrico inscritto nella circonferenza γ di raggio R e di centro O al contempo circoscritto alla circonferenza τ di raggio r e di centro I. Chiaramente, $R > r$, perché altrimenti $ABCD$ non potrebbe essere tangente a τ. Ottenuta la disuguaglianza, la sfida è dimostrare che il valore minimo del rapporto $\frac{R}{r}$ è proprio $\sqrt{2}$. Si può sfruttare la tangenza tra τ e $ABCD$ per individuare i triangoli ABI, BCI, CDI, ADI rispettivamente di aree $\mathcal{A}_A$, $\mathcal{A}_B$, $\mathcal{A}_C$, $\mathcal{A}_D$. La somma delle aree risulta $\mathcal{A}_A + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_C + \mathcal{A}_D = \mathcal{A}_{ABCD}$ dalla triangolazione di $ABCD$, possibile perché I è interno ad $ABCD$ (altrimenti si otterrebbe un assurdo per cui i lati di $ABCD$, tangenti a τ per costruzione, sarebbero secanti). Dal momento che $ABCD$ è tangenziale a τ, si può scegliere di esprimere l'area di ciascun triangolo come semiprodotto della misura x del lato del triangolo che è tangente a τ e la misura di r (perché certamente esiste un raggio r perpendicolare al lato, dato che il lato x è tangente a τ):

$$\mathcal{A}_X = \frac{1}{2}xr.$$

Indicando con a, b, c, d le misure dei lati di $ABCD$ in ordine arbitrario, si giunge all'uguaglianza:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr = \frac{1}{2}(a+b+c+d)r = pr,$$

dove $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ è la misura del semiperimetro di $ABCD$.

Il rapporto $\dfrac{R}{r}$ è minimo quando r è massimo; fissato il semiperimetro p, il raggio di $ABCD$ è massimo quando $\mathcal{A}_{ABCD}$ è massima. È noto che tra i quadrilateri isoperimetrici, quello di massima area è un quadrato[1]. Dalla formula di Brahmagupta[2], si sa che:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Quindi:

$$rp = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Nel caso del quadrato, $p = 2\ell = 2\sqrt{2}R$, perché $R = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$. La relazione appena utilizzata si può ricavare notando che ABC è un triangolo rettangolo per costruzione - $ABCD$ è un quadrato, quindi $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

-, $\overline{BC} = 2R$ è un diametro di γ. Dal teorema di Pitagora si ricava che $4R^2 = 2\ell^2 \implies 2\ell = 2\sqrt{2}R$. Sostituendo $a = b = c = d = \ell \implies p - a = p - b = p - c = p - d = p - \ell = \frac{p}{2}$ nell'uguaglianza delle aree si ricava che:

$$rp = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^4} \implies r = \frac{p}{4}.$$

Sostituendo $p = 2\sqrt{2}R$, si ottiene finalmente che:

$$r = \frac{2\sqrt{2}R}{4} \implies R = r\sqrt{2}.$$

Avendo concluso che il valore minimo del rapporto è $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$, si è dimostrato che in generale $R \geq r\sqrt{2}$, cioè la tesi.

Note alla lettura

[1] Quadrilatero di area massima:

A parità di perimetro, il quadrilatero con l'area massima è un quadrato. Si dimostrerà l'asserto provando innanzi tutto che il quadrilatero di area massima è convesso, poi che è ciclico con due angoli retti e, infine, che deve avere tutti i lati uguali e deve avere tutti gli angoli uguali.

È immediato capire che il quadrilatero debba essere convesso, perché per ogni quadrilatero concavo, ce n'è uno convesso con lo stesso perimetro che ha area maggiore. Se si costruisce un quadrilatero $ABCD$, dove la concavità si trova in $\widehat{D}$, riflettendo D sulla retta passante per $\overline{AC}$, si ottiene un quadrilatero $ABCD'$ che ha un rombo di area in più rispetto ad $ABCD$. L'area di $\mathcal{A}$ di $ABCD$ si può calcolare come somma delle aree dei triangoli ABC e ADC (per brevità sono indicate le misure dei lati nell'ordine a, b, c, d, e con f la misura di $\overline{AC}$):

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha) + \frac{1}{2}cd\sin(\beta) \implies 16\mathcal{A}^2 = 4a^2b^2\sin^2(\alpha) + 4c^2d^2\sin^2(\beta) + 8abcd\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

dove α è l'ampiezza di $\widehat{ABC}$, e β è l'ampiezza di $\widehat{ADC}$.

Dal teorema del coseno:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\beta)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\beta)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos(\alpha) - 2cd\cos(\beta)$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2\cos^2(\alpha) + 4c^2d^2\cos^2(\beta) - 8abcd\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

Sommando questa equazione a quella dell'area:

$$16\mathcal{A}^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd\cos(\alpha + \beta)$$

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Massimizzando $-8abcd\cos(\alpha + \beta)$, il meglio che si può sperare è che $\cos(\alpha + \beta) = -1$ (anche che $abcd = \frac{p^4}{16}$ perché $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$), cioè che $\alpha + \beta = \pi$, quindi $ABCD$ dev'essere ciclico. Minimizzando $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$, il meglio che si può sperare è che $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 0 \implies a^2+b^2 = c^2+d^2$

Allora:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) = c^2 + d^2 + 2cd\cos(\alpha)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) = c^2 + d^2 + 2cd\cos(\alpha)$$

$$-2ab\cos(\alpha) = 2cd\cos(\alpha)$$

$\cos(\alpha)(ab+cd)=0$

Dal momento che $ab+cd>0$, dato che a,b,c,d sono numeri positivi, l'unica opzione è che $\cos(\alpha)=0$. Sapendo che $ABCD$ è ciclico, necessariamente si ha che $\alpha=\frac{\pi}{2}$. $ABCD$ è ciclico, inscritto in una circonferenza di raggio r e di centro O, e ha una diagonale, supponendo - senza perdita di generalità - che sia $\overline{AC}$, opposta a due angoli retti, quindi ABC e ACD sono triangoli rettangoli, retti in B e in D rispettivamente, mentre $\overline{AC}$ è un diametro. Dato che l'area $\mathcal{A}_{ABCD}$ si può scrivere come somma delle aree dei triangoli rettangoli:

$\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{ABC}+\mathcal{A}_{ACD}$

Ovviamente, le aree componenti non dipendono l'una dall'altra, allora è possibile massimizzare ciascun addendo singolarmente. Massimizzando prima l'area di ABC. Detto θ l'angolo acuto formato dal raggio $\overline{OB}$ e $\overline{AC}$, l'area di ABC si può calcolare come somma di $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{AOB}+\mathcal{A}_{BOC}$. Si vede chiaramente che:

$\mathcal{A}_{AOB}=\mathcal{A}_{BOC}=\dfrac{1}{2}r^2\sin(\theta).$

L'area $\mathcal{A}_{ABC}=r^2\sin(\theta)$ è massima quando $\sin(\theta)=1$, cioè quando $\theta=\frac{\pi}{2}$ e $\widehat{OAB}\cong\widehat{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$, cioè quando ABC è isoscele. Per evidenti motivi di simmetria, l'area di ACD è massima quando ACD è isoscele, quindi $ACD\cong ABC$, vale la catena di congruenze $\overline{AB}\cong\overline{BC}\cong\overline{CD}\cong\overline{AD}=r\sqrt{2}$. Si noti anche che $\widehat{BAD}\cong\widehat{BCD}\cong=\frac{\pi}{2}$ e che $\widehat{ABC}\cong\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2}$, quindi $\widehat{ABC}\cong\widehat{ADB}\cong\widehat{BAD}\cong\widehat{BCD}$. Si vede anche che, siccome $a=b=c=d=\ell$, è confermata l'ipotesi di massimizzazione di $abcd$, infatti $abcd=\ell^4=\frac{p^4}{16}=\frac{(2\ell)^4}{16}=\ell^4$. È dimostrato così che $ABCD$, il quadrilatero isoperimetrico di area massima, è necessariamente un quadrato.

[2] Formula di Brahmagupta:

In un quadrilatero ciclico di lati di misure a,b,c,d, sia f la misura della diagonale sottesa dai lati che misurano a,b e c,d. Dato che $abcd$ è ciclico, $\widehat{ab}=\alpha=\pi-\widehat{cd}\implies\cos(\widehat{ab})=-\cos(\widehat{cd})$. Dal teorema del coseno:

$f^2=a^2+b^2-2ab\cos(\alpha)=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\alpha)$

$\cos(\alpha)=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$

L'area di $abcd$ può essere scritta come somma delle aree dei triangoli abf e cdf, quindi:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}ab\sin(\alpha)+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\alpha)=\frac{ab+cd}{2}\sin(\alpha)\implies\mathcal{A}^2=\frac{(ab+cd)^2}{4}\sin^2(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha)=1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}\right)^2=\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd)}\right)=$$

$$\left(\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2ab+2cd}\right)\left(\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2ab+2cd}\right)=$$

$$\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)(a+b+c-d)(a+b+d-c)}{2(ab+cd)^2}=$$

$$\frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)}{4(ab+cd)^2}=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}.$$

Sostituendo questo valore nella formula dell'area:

$\mathcal{A}^2=\dfrac{(ab+cd)^2}{4}\cdot\dfrac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}$. Da cui:

$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$

Conclusione

Spero che questa lettura sia stata gradevole, magari i calcoli sono un po' fastidiosi, ma tutto sommato spero sia stato un piacere leggere questo documento. Sono troppo pigro per disegnare i diagrammi in LaTeX, consiglio vivamente di seguire con un disegno.