2. Date le rette di equazioni:

$2kx + (3k-1)y + 2k - 5 = 0$ e $(k-2)x + (k+3)y - k - 1 = 0$

a) discuti al variare del parametro $k \in R$ la posizione reciproca delle rette;

b) è possibile che la prima retta coincida con l'asse y?

c) trova i valori di k per cui la seconda retta passa per l'origine degli assi;

d) trova i valori di k per cui la prima retta è parallela all'asse x. La retta trovata è il grafico di una funzione? Fornisci una spiegazione esauriente;

e) trova i valori di k per cui la seconda retta passa per il punto $P(1+\sqrt{3},\ \sqrt{3}-2)$.

a)

LE RETTE SONO SCRITTE IN FORMA IMPLICITA. INDIVIDUIAMO I LORO COEFFICIENTI a, b, a', b' E IMPONIAMO CHE SIANO PARALLELE CON LA CONDIZIONE:

$$ab' - a'b = 0$$

DEVE ESSERE

$$\underbrace{2k}_{a}\underbrace{(k+3)}_{b'} - \underbrace{(k-2)}_{a'}\underbrace{(3k-1)}_{b} = 0$$

$$2k^2 + 6k - (3k^2 - k - 6k + 2) = 0$$

$$2k^2 + 6k - 3k^2 + 7k - 2 = 0$$

$$-k^2 + 13k - 2 = 0$$

$$k^2 - 13k + 2 = 0$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(1)(2) = 169 - 8 = 161$$

$$k_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{161}}{2}$$

PER $k = \frac{13 \pm \sqrt{161}}{2}$ LE DUE RETTE SONO PARALLELE.

SCRIVIAMO E APPLICHIAMO LA CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ

$$aa' - bb' = 0$$

$$2k(k-2) - (3k-1)(k+3) = 0$$

$$2k^2 - 4k - (3k^2 + 9k - k - 3) = 0$$

$$2k^2 - 4k - 3k^2 - 8k + 3 = 0$$

$$-k^2 - 12k + 3 = 0$$

$$k^2 + 12k - 3 = 0$$

$$\Delta = (12)^2 - 4(-3) = 144 + 12 = 156$$

$$k_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{156}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{2}$$

$$= \frac{2(-6 \pm \sqrt{39})}{2} = -6 \pm \sqrt{39}$$

PER $k = -6 \pm \sqrt{39}$ LE RETTE SONO PERPENDICOLARI.

b) AFFINCHÈ LA RETTA COINCIDA CON L'ASSE DELLE Y, DEVE AVERE:

$$\begin{cases} 3k-1=0 \\ 2k-5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k=1/3 \\ k=5/2 \end{cases}$$

NON ESISTE NESSUN VALORE DI K CHE SODDISFI ENTRAMBE LE CONDIZIONI. QUINDI LA PRIMA RETTA <u>NON</u> COINCIDE CON L'ASSE Y.

c) L'ORIGINE DEGLI ASSI È IL PUNTO O(0; 0). SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE DEL FASCIO $x=0$ E $y=0$ IN QUESTO MODO TROVO IL PARAMETRO K:

$$(k-2)0+(k+3)y-k-1=0$$

$$-k-1=0$$

$$-k=1$$

$$k=-1$$

d) UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE X HA EQUAZIONE DEL TIPO $y=a$.

PERTANTO L'EQUAZIONE DATA RAPPRESENTA UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE X SE E SOLO SE IL COEFFICIENTE DI X È NULLO:

$$2k=0$$

$$k=0$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE DEL FASCIO, OTTENIAMO

$$2\cdot 0x+(3\cdot 0-1)y+2\cdot 0-5=0$$

$$0x-y-5=0$$

$$y+5=0$$

$$y=-5$$

LA RETTA TROVATA È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE REALE

$$f(x)=-5$$

definita per tutti i valori di $x\in\mathbb{R}$, poiché ogni valore di x corrisponde a uno e un solo valore di y.

e) SOSTITUIAMO LE COORDINATE DEL PUNTO P NELL'EQUAZIONE DELLA RETTA.

$$(K-2)(1+\sqrt{3})+(K+3)(\sqrt{3}-2)-K-1=0$$

$$K+\sqrt{3}K-2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}K-2K+3\sqrt{3}-6-K-1=0$$

$$-2K+2\sqrt{3}K+\sqrt{3}-9=0$$

$$(-2+2\sqrt{3})K+\sqrt{3}-9=0$$

$$K=\frac{9-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}\cdot\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2}$$

$$=\frac{(9-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+2)}{4\cdot 3-4}$$

$$=\frac{18\sqrt{3}+18-6-2\sqrt{3}}{12-4}$$

$$=\frac{16\sqrt{3}+12}{8}=\frac{\cancel{4}^{1}(4\sqrt{3}+3)}{\cancel{8}_{2}}$$

$$=\frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}}+\frac{3}{2}=2\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$K=2\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$