Matematica Finanziaria: Piano di ammortamento

A. Fabretti

annalisa.fabretti@uniroma2.it

Definizioni Rendite

Una rendita é un'operazione finanziaria che prevede una successione di importi chiamate **rate** da pagare o riscuotere a intervalli di tempo determinati.
Una rendita si dice

- **limitata o temporanea** se la durata é finita
- **perpetua** se la durata é infinita

- **anticipata** se la rata é corrisposta ad inizio periodo
- **posticipata** se la rata é corrisposta a fine periodo

- **immediata** se il flusso di cassa della rendita inizia subito
- **differita** se il flusso di cassa della rendita inizia tra m periodi

Esempi di rendite sono i benefici pensionistici, i mutui, alcuni titoli obbligazionari (Btp a cedola costante), rendite da affitto etc

Valore attuale

Rendita unitaria posticipata rata

	immediata	differita m periodi
perpetua	$a_{\overline{\infty}\rceil i} = \frac{1}{i}$	$\frac{1}{i}(1+i)^{-m}$
temporanea	$a_{\overline{n}\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-m}$

Valore attuale

Rendita unitaria anticipata

	immediata	differita m periodi
perpetua	$\ddot{a}_{\overline{\infty}\rceil i} = \frac{1}{i}(1+i)$	$\frac{1}{i}(1+i)^{-m+1}$
temporanea	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-m+1}$

Valore futuro Rendite

Valore attuale e valore futuro sono nella relazione

$$VA = VF \cdot v(t) \quad o \quad VF = VA \cdot r(t)$$

dove $v(t)$ il fattore di attualizzazione e $r(t)$ il fattore di capitalizzazione.
Il valore futuro e montante si calcola solo per le rendite temporanee.
Le rendite differite hanno lo stesso montante delle rendite immediate

anticipata	posticipata
$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$	$s_{\overline{n}\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Definizione

Il **piano di ammortamento** o **piano di rimborso** definisce le modalitá di rimborso di un capitale preso in prestito. Il piano indica per ogni rata la quota capitale rimborsata, la quota interesse corrisposta e il debito residuo dopo il pagamento della rata.

t	R_t	QI_t	QC_t	DR_t
0	0	0	0	C
1	R_1	QI_1	QC_1	DR_1
2	R_2	QI_2	QC_2	DR_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	R_n	QI_n	QC_n	0

Formule di Ammortamento

La rata R_t ad ogni istante t si compone di quota capitale QC_t e QI_t:

$$R_t = QC_t + QI_t$$

la quota interesse é l'interesse pagato su debito residuo DR_{t-1}

$$QI_t = i\ DR_{t-1}$$

il debito residuo si aggiorna sottraendo dal debito residuo dell'istante $t-1$ la quota capitale pagata

$$DR_t = DR_{t-1} - QC_t$$

Tipologie di Ammortamento

Un piano di ammortamento puó avere

- **Rata costante** e viene detto **ammortamento francese**
- **Quota capitale** costante e viene detto **ammortamento italiano**

NB: Esistono altri piani di ammortamento (esempio: tedesco, americano..) che non sono oggetto di studio in questo corso.

Ammortamento Francese: Calcolare la rata

Preso un prestito di importo C al tasso i e durata n, calcoliamo la rata costante R utilizzando le formule delle rendite

- se pagata in via anticipata $R = \frac{C}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}}$
- se pagata in via posticipata $R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}}$
- se pagata in via anticipata e differita di m periodi $R = \frac{C}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{-m}}$
- se pagata in via posticipata e differita di m periodi $R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}(1+i)^{-m}}$

Ammortamento Francese: Compilare il piano

La colonna delle rate sará compilata con la rata costante R.

t	R_t	QI_t	QC_t	DR_t
0	0	0	0	C
1	R			
2	R			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	R			0

Ammortamento Francese: Compilare il piano

Determiniamo la quota interesse

$$QI_1 = C * i$$

e calcoliamo la quota capitale

$$QC_1 = R - QI_1$$

aggiorniamo il debito residuo

$$DR_1 = C - QC_1$$

Nota che C é uguale al debito residuo al tempo 0, denotato con DR_0.

Ammortamento Francese: Compilare il piano

Iterando le formule abbiamo

$$\begin{array}{ll} \text{quota interesse} & QI_t = DR_{t-1} * i \\ \text{quota capitale} & QC_t = R - QI_t \\ \text{debito residuo} & DR_t = DR_{t-1} - QC_t \end{array}$$

con $t = 1, ..., n$, $DR_0 = C$ e $R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}}$ (via posticipata)

Ammortamento Francese: Esempio 1

Determinare il piano di ammortamento di un prestito offerto al tasso $i = 6\%$ di 10000 euro restituito in 5 rate costanti pagate in via posticipata.

1) Determinare rata $R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}} = 2373.96$

2) Compilare il piano usando le formule $QI_t = DR_{t-1} * i$, $QC_t = R - QI_t$ e $DR_t = DR_{t-1} - QC_t$

Ammortamento Francese: Esempio 1

t	R_t	QI_t	QC_t	DR_t
0	0	0	0	10000
1	2373.96	600	1773.96	8226.04
2	2373.96	493.56	1880.40	6345.64
3	2373.96	380.74	1993.22	4352.42
4	2373.96	261.14	2112.82	2239.60
5	2373.96	134.37	2239.59	~ 0

Ammortamento Francese: Esempio 2

Nell'ammortamento francese di un prestito di 10 anni la settima rata comprende una quota capitale di 300 ed una quota interessi di 250. Sapendo che il tasso applicato é il 4% determinare l'importo del prestito.

Soluzione: sappiamo che la rata é $R = 300 + 250 = 550$. l'importo del prestito é $C = 550 a_{\overline{10}|4\%}$

Ammortamento Italiano: Calcolare la quota capitale

Preso un prestito di importo C al tasso i e durata n, calcoliamo la quota capitale costante

$$QC = \frac{C}{n}$$

Determiniamo la prima quota interesse

$$QI_1 = C * i$$

e calcoliamo la rata

$$R_1 = QC + QI_1$$

aggiorniamo il debito residuo

$$DR_1 = C - QC$$

Ammortamento Italiano: Compilare il piano

Iterando si hanno le formule

$$\begin{array}{ll} \text{quota interesse} & QI_t = DR_{t-1} * i \\ \text{rata} & R_t = QC + QI_t \\ \text{debito residuo} & DR_t = DR_{t-1} - QC \end{array}$$

con $t = 1, ..., n$, $DR_0 = C$ e $QC = \frac{C}{n}$ (via posticipata)

Ammortamento Italiano: Esempio 1

Determinare il piano di ammortamento italiano di un prestito offerto al tasso $i = 6\%$ di 10000 euro restituito in 5 rate pagate in via posticipata.
1) Determinare la quota capitale costante

$$QC = \frac{C}{n} = 2000$$

2) Compilare il piano usando

$$QI_t = DR_{t-1} * i, \quad R = QC + QI_t, \quad DR_t = DR_{t-1} - QC$$

t	R_t	QI_t	QC_t	DR_t
0	0	0	0	10000
1	2600	600	2000	8000
2	2480	480	2000	6000
3	2360	360	2000	4000
4	2240	240	2000	2000
5	2120	120	2000	0

Osservazioni su ammortamento francese e italiano

In che modo evolvono nel tempo le quote interessi nei due ammortamenti?

Come evolvono le rate e le quote capitali?

Come evolve il debito residuo?

Ammortamento Francese e Italiano: Osservazioni sul debito residuo

Nell'ammortamento francese al pagamento della rata k il debito residuo coincide con il valore attuale delle rate ancora da pagare,

$$DR_k = R\ a_{\overline{n-k|}i}.$$

Nell'ammortamento italiano al pagamento della rata k si sono restituite $k * QC$ quote capitali, il debito residuo quindi risulta

$$DR_k = C - k\ QC = QC\ (n-k).$$

Tan e Taeg

Il TAN é il Tasso Annuale Netto ed é il tasso annuo nominale applicato al credito concesso al netto delle spese e degli oneri.

Il TAEG é il Tasso Annuo Effettivo Globale ed é il tasso che include tutte le commissioni applicate al mutuo/prestito.

In un mutuo/prestito rientrano per il calcolo della rata le spese di istruttoria, le commissioni, le assicurazioni obbligatorie (etc) che vanno aggiunte all'importo del mutuo. Sull'importo totale si calcola la rata usando il TAN. Invece per calcolare la rata a partire dall'importo al netto delle spese si applica il TAEG.

Tan e Taeg: Esempio

Si consideri un mutuo di importo 203150 euro, durata trentennale e rata mensile, con $TAEG = 7.883\%$ e $TAN = 7.625\%$.
Calcolare la rata e le spese.

Usando il TAEG determiniamo la rata e otteniamo $R = 1474$.
Con questa rata usando il TAN determiniamo il valore effettivo del prestito concesso $C = 208267$ euro.
Tale mutuo prevede quindi spese complessive (istruttoria, commissioni ...) pari a $208267 - 203150 = 5177$.