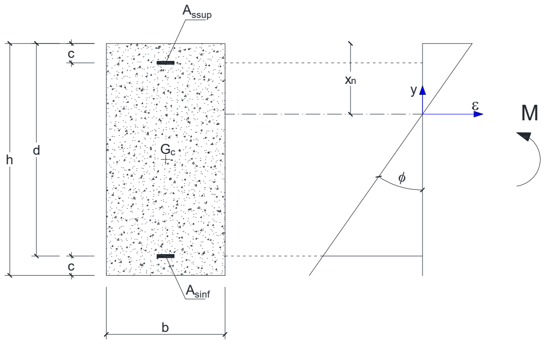
CALCOLO DEL MOMENTO ULTIMO DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE IN C.A. DOPPIAMENTE ARMATA E SEMPLICEMENTE INFLESSA

con riferimento alle NTC 18 - DM 17 gennaio 2018

Dati geometrici della sezione

$b := 100mm \quad h := 250mm \quad c := 30mm \quad d := h - c = 22 \cdot cm$

$A_{sinf} := 2 \cdot \frac{\pi \cdot (12mm)^2}{4} = 2.262 \cdot cm^2 \qquad A_{ssup} := 2 \cdot \frac{\pi \cdot (10mm)^2}{4} = 1.571 \cdot cm^2$



Dati dei materiali

Acciaio tipo B450C

$\gamma_s := 1.15 \quad E_s := 2.06 \cdot 10^5 MPa \quad f_{yk} := 450MPa \quad \varepsilon_{uk} := 0.12 \; = (A_{gt})_k \quad k := 1.15 \; = (f_t / f_y)_k$

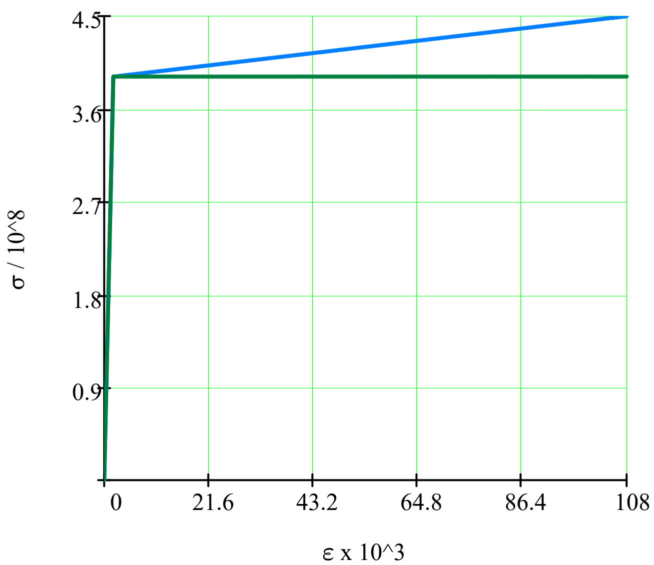
$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 391.304 \cdot MPa \qquad \varepsilon_{yd} := \frac{f_{yd}}{E_s} = 1.9 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{ud} := 0.9 \cdot \varepsilon_{uk} = 0.108$

Legame costitutivo tipo a - elasto- plastico incrudente con deformazione ultima finita § 4.1.2.1.2.3 delle NTC18

$$\sigma_{sa}(\varepsilon) := \text{if}\left[|\varepsilon| < \varepsilon_{yd}, E_s \cdot \varepsilon, \text{sign}(\varepsilon) \cdot f_{yd} \cdot \left[1 + \frac{|\varepsilon| - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{ud} - \varepsilon_{yd}} \cdot (k-1)\right]\right]$$

Legame costitutivo elastico- perfettamente plastico indefinito (tipo b- cfr. § 4.1.2.1.2.3 delle NTC18

$\sigma_{sb}(\varepsilon) := \text{if}\left(|\varepsilon| < \varepsilon_{yd}, E_s \cdot \varepsilon, \text{sign}(\varepsilon) \cdot f_{yd}\right) \qquad \varepsilon\varepsilon_s := 0, 10^{-4} .. \varepsilon_{ud}$ intervallo di plottaggio



Calcestruzzo

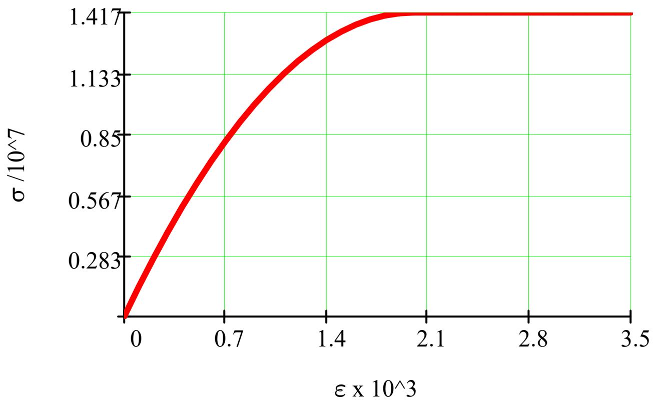
Si usa il legame costitutivo tipo a) § 4.1.2.1.2.1 delle NTC18

$R_{ck} := 30MPa \qquad \gamma_c := 1.5 \qquad \alpha_{cc} := 0.85 \qquad f_{ck} := 25MPa$

$$f_{cd} := \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = 14.167 \cdot MPa \qquad \varepsilon_{c2} := 2 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{cu} := 3.5 \times 10^{-3}$$

$$par(\varepsilon) := f_{cd} \cdot \left[2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2\right] \qquad \sigma_c(\varepsilon) := if\left(\varepsilon < \varepsilon_{c2}, par(\varepsilon), f_{cd}\right) \qquad \varepsilon\varepsilon_c := 0, 10^{-4} .. \varepsilon_{cu}$$

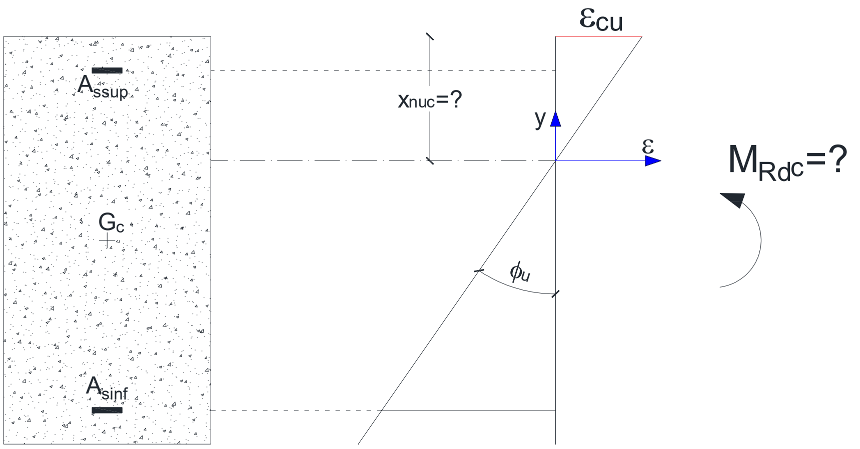
intervallo di plottaggio

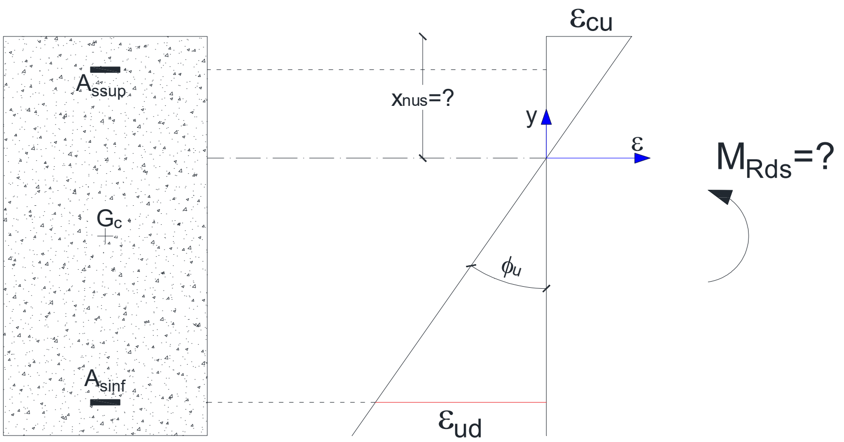


Calcolo del momento ultimo - M_{Rd} allo SLU

CASO a) Acciaio con legame elasto-plastico incrudente con deformazione ultima finita

Con questo legame costitutivo devono essere gestite due possibili modalità di rottura: la rottura del cls al bordo compresso e la rottura dell'acciaio teso. La rottura dell'acciaio compresso non viene considerata perché le armature sono prossime al bordo compresso della sezione e quindi le deformazioni nell'armatura superiore sono simili a quelle del calcestruzzo al bordo più compresso ma, poiché la deformazione di rottura dell'acciaio e maggiore di quella del calcestruzzo, la rottura di quest'ultimo precede la rottura dell'acciaio superiore. Si mostrano due metodi per il calcolo del momento ultimo della sezione.





METODO 1 - Calcolo del Momento M_{Rdc} che corrisponde alla deformazione ultima ε_{cu} del calcestruzzo e del Momento M_{Rds} che corrisponde alla deformazione ultima ε_{ud} dell'acciaio inferiore

Funzioni utili metodo 1

$$\varepsilon_c(x_n, y) := \frac{\varepsilon_{cu}}{x_n} \cdot y \qquad \varepsilon_s(x_n, y) := \frac{-\varepsilon_{ud}}{x_n - d} \cdot y \qquad \sigma_{ssupc}(x_n) := \sigma_{sa}(\varepsilon_c(x_n, x_n - c)) \qquad \sigma_{ssups}(x_n) := \sigma_{sa}(\varepsilon_s(x_n, x_n - c))$$

$$\sigma_{sinfs}(x_n) := \sigma_{sa}(\varepsilon_s(x_n, x_n - d)) \qquad \sigma_{sinfc}(x_n) := \sigma_{sa}(\varepsilon_c(x_n, x_n - d))$$

Calcolo M_{Rdc}

$$N_c(x_n) := \int_0^{x_n} b \cdot \sigma_c(\varepsilon_c(x_n, y))\, dy + \sigma_{ssupc}(x_n) \cdot A_{ssup} + \sigma_{sinfc}(x_n) \cdot A_{sinf}$$

$$x_{nt} := \frac{h}{5} \qquad x_{nc} := \mathrm{root}(N_c(x_{nt}), x_{nt}) = 4.522 \cdot cm$$

$$M_{Rdc} := \int_0^{x_{nc}} b \cdot \sigma_c(\varepsilon_c(x_{nc}, y)) \cdot y\, dy + \sigma_{ssupc}(x_{nc}) \cdot A_{ssup} \cdot (x_{nc} - c) + \sigma_{sinfc}(x_{nc}) \cdot A_{sinf} \cdot (x_{nc} - d) = 17.67 \cdot kN \cdot m$$

Calcolo M_{Rds}

$$N_s(x_n) := \int_0^{x_n} b \cdot \sigma_c(\varepsilon_s(x_n, y))\, dy + \sigma_{ssups}(x_n) \cdot A_{ssup} + \sigma_{sinfs}(x_n) \cdot A_{sinf}$$

$$x_{ns} := \mathrm{root}(N_s(x_{nt}), x_{nt}) = 3.303 \cdot cm$$

$$M_{Rds} := \int_0^{x_{ns}} b \cdot \sigma_c(\varepsilon_s(x_{ns}, y)) \cdot y\, dy + \sigma_{ssups}(x_{ns}) \cdot A_{ssup} \cdot (x_{ns} - c) + \sigma_{sinfs}(x_{ns}) \cdot A_{sinf} \cdot (x_{ns} - d) = 19.974 \cdot kN \cdot m$$

Calcolo M_{Rd}

Il momento ultimo della sezione è il minimo tra M_{Rdc} e M_{Rds}

$$M_{Rd} := \min(M_{Rdc}, M_{Rds}) = 17.674 \cdot kN \cdot m$$

METODO 2- Calcolo diretto del Momento M_{Rd}

Funzioni utili metodo 2

$$\varepsilon_c(x_n,y) := \frac{\varepsilon_{cu}}{x_n}\cdot y \qquad \varepsilon_s(x_n,y) := \frac{-\varepsilon_{ud}}{x_n - d}\cdot y \qquad x_{lim} := \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_{ud}}\cdot d = 0.691\cdot cm \qquad \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_{ud}} = 0.031$$

$$\varepsilon_a(x_n,y) := \text{if}\left(x_n < x_{lim}, \varepsilon_s(x_n,y), \varepsilon_c(x_n,y)\right) \qquad \sigma_{ssupa}(x_n) := \sigma_{sa}\left(\varepsilon_a(x_n, x_n - c)\right) \qquad \sigma_{sinfa}(x_n) := \sigma_{sa}\left(\varepsilon_a(x_n, x_n - d)\right)$$

Equazioni

Equazione di equilibrio alla traslazione

$$N_a(x_n) := \int_0^{x_n} b\cdot\sigma_c\left(\varepsilon_a(x_n,y)\right)dy + \sigma_{ssupa}(x_n)\cdot A_{ssup} + \sigma_{sinfa}(x_n)\cdot A_{sinf}$$

$$x_{nt} := \frac{h}{5} \qquad x_{na} := \text{root}\left(N_a(x_{nt}), x_{nt}\right) = 4.522\cdot cm$$

Equazione di equilibrio alla rotazione

$$M_{Rda} := \int_0^{x_{na}} b\cdot\sigma_c\left(\varepsilon_a(x_{na},y)\right)\cdot y\,dy + \sigma_{ssupa}(x_{na})\cdot A_{ssup}\cdot(x_{na}-c) + \sigma_{sinfa}(x_{na})\cdot A_{sinf}\cdot(x_{na}-d) = 17.674\cdot kN\cdot m$$

Controllo delle modalità di rottura

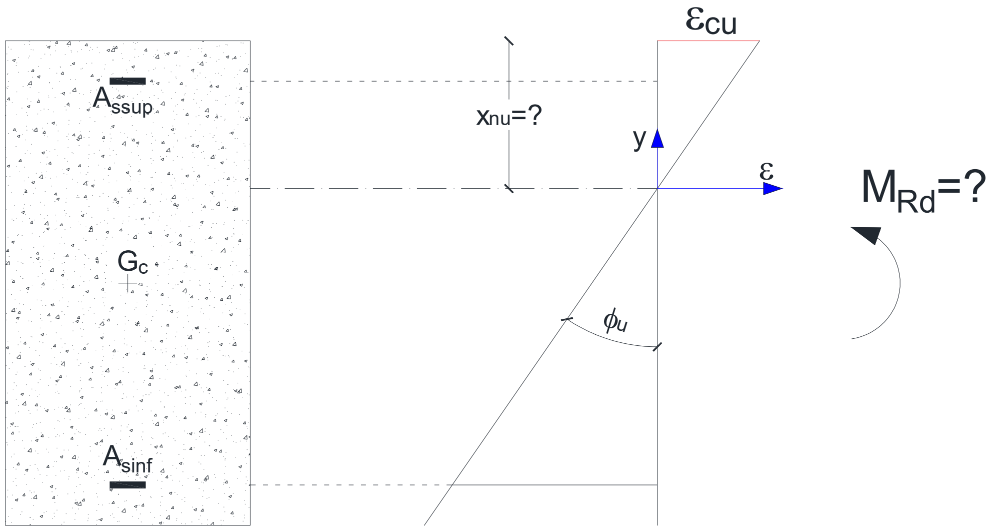
$$\varepsilon_a(x_{na},x_{na}) = 3.5\times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{cu} = 3.5\times 10^{-3} \qquad \frac{\varepsilon_a(x_{na},x_{na})}{\varepsilon_{cu}} = 1$$

$$\varepsilon_a(x_{na},x_{na}-d) = -0.014 \qquad \varepsilon_{ud} = 0.108 \qquad \varepsilon_{yd} = 0.002 \qquad \frac{\varepsilon_a(x_{na},x_{na}-d)}{-\varepsilon_{ud}} = 0.125 \qquad \frac{\varepsilon_a(x_{na},x_{na}-d)}{-\varepsilon_{yd}} = 7.123$$

OSS_1.: si è rotto il calcestruzzo con acciaio snervato

CASO b) Acciaio con legame costitutivo elastico - perfettamente plastico indefinito

Con il legame costitutivo di tipo b l'acciaio non si rompe e la rottura della sezione si verifica al raggiungimento della deformazione ε_{cu} al bordo più compresso della sezione di calcestruzzo



Funzioni utili caso b

$$\varepsilon_c(x_n, y) := \frac{\varepsilon_{cu}}{x_n} \cdot y \qquad \varepsilon_b(x_n, y) := \varepsilon_c(x_n, y) \qquad \sigma_{ssupb}(x_n) := \sigma_{sb}(\varepsilon_b(x_n, x_n - c)) \qquad \sigma_{sinfb}(x_n) := \sigma_{sb}(\varepsilon_b(x_n, x_n - d))$$

Equazioni

Equazione di equilibrio alla traslazione

$$N_b(x_n) := \int_0^{x_n} b \cdot \sigma_c(\varepsilon_b(x_n, y))\, dy + \sigma_{ssupb}(x_n) \cdot A_{ssup} + \sigma_{sinfb}(x_n) \cdot A_{sinf}$$

$$x_{ntb} := \frac{h}{5} \qquad x_{nb} := \mathrm{root}(N_b(x_{ntb}), x_{ntb}) = 4.47 \cdot cm$$

Equazione di equilibrio alla rotazione

$$M_{Rdb} := \int_0^{x_{nb}} b \cdot \sigma_c(\varepsilon_b(x_{nb}, y)) \cdot y\, dy + \sigma_{ssupb}(x_{nb}) \cdot A_{ssup} \cdot (x_{nb} - c) + \sigma_{sinfb}(x_{nb}) \cdot A_{sinf} \cdot (x_{nb} - d) = 17.402 \cdot kN \cdot m$$

Controllo delle modalità di rottura - caso b)

$$\varepsilon_b(x_{nb}, x_{nb}) = 3.5 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{cu} = 3.5 \times 10^{-3} \qquad \frac{\varepsilon_b(x_{nb}, x_{nb})}{\varepsilon_{cu}} = 1$$

$$\varepsilon_b(x_{nb}, x_{nb} - d) = -0.014 \qquad \varepsilon_{ud} = 0.108 \qquad \varepsilon_{yd} = 0.002 \qquad \frac{\varepsilon_b(x_{nb}, x_{nb} - d)}{-\varepsilon_{ud}} = 0.127 \qquad \frac{\varepsilon_b(x_{nb}, x_{nb} - d)}{-\varepsilon_{yd}} = 7.226$$

N.B. anche nel caso b) si è rotto il calcestruzzo con acciaio snervato

CONFRONTO TRA I RISULTATI DEL CASO a) E DEL CASO b)

$x_{na} = 4.522 \cdot cm \quad M_{Rda} = 17.674 \cdot kN \cdot m$

$$\frac{M_{Rda}}{M_{Rdb}} = 1.016 \qquad h = 25 \cdot cm$$

$x_{nb} = 4.47 \cdot cm \quad M_{Rdb} = 17.402 \cdot kN \cdot m$

$$z_{ua} := \frac{M_{Rda}}{-\sigma_{sa}\left(\varepsilon_a\left(x_{na}, x_{na} - d\right)\right) \cdot A_{sinf}} = 19.645\,cm \qquad z_{ub} := \frac{M_{Rdb}}{-\sigma_{sb}\left(\varepsilon_b\left(x_{nb}, x_{nb} - d\right)\right) \cdot A_{sinf}} = 19.661\,cm$$

OSS$_2$.: La posizione dell'asse neutro calcolata con il legame costitutivo b dell'acciaio è praticamente coincidente con quella calcolata con il legame a. Come è ovvio, nel caso a, si ottiene un incremento di resistenza rispetto al caso b. Nel caso a si rompe il calcestruzzo (nel caso b non può essere altrimenti) In entrami i casi la rottura avviene con acciaio snervato poiche la deformazione dell'acciaio inferiore, a rottura, è più grande della deformazione di snervamento di progetto. I bracci della coppia interna z_{ua} e z_{ub} sono praticamente coincidenti