Funzioni goniometriche di un multiplo intero di un angolo

Argomento

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$(e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$

$\cos(nx) + i\sin(nx) = f(\cos(x), \sin(x)) + ig(\cos(x), \sin(x)) \quad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cos(nx) - f(\cos(x), \sin(x)) = i(g(\cos(x), \sin(x)) - \sin(nx))$

Detto a il primo membro e b il secondo, è ovvio che $a \in \mathbb{R},\ b \in (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \cup \{0\}$, quindi $a = b$ se e solo se $a = 0 = b$.

Allora

$\cos(nx) - f(\cos(x), \sin(x)) = 0 \implies \cos(nx) = f(\cos(x), \sin(x))$

$g(\cos(x), \sin(x)) - \sin(x) \implies \sin(nx) = g(\cos(x), \sin(x))$.

Esempio: formula di duplicazione

$(\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos(2x) + i\sin(2x)$

$\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x) = \cos(2x) + i\sin(2x)$

$i(2\sin(x)\cos(x) - \sin(2x)) = \cos(2x) - \cos^2(x) + \sin^2(x)$

Da cui

$\cos(2x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0 \implies \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$2\sin(x)\cos(x) - \sin(2x) = 0 \implies \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Domanda

È possibile determinare f e g a priori noto n? L'esigenza sorge dal desiderio di evitare i calcoli tediosi, fastidiosi anche con il binomio di Newton.

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(x)(i\sin(x))^{n-k}$$