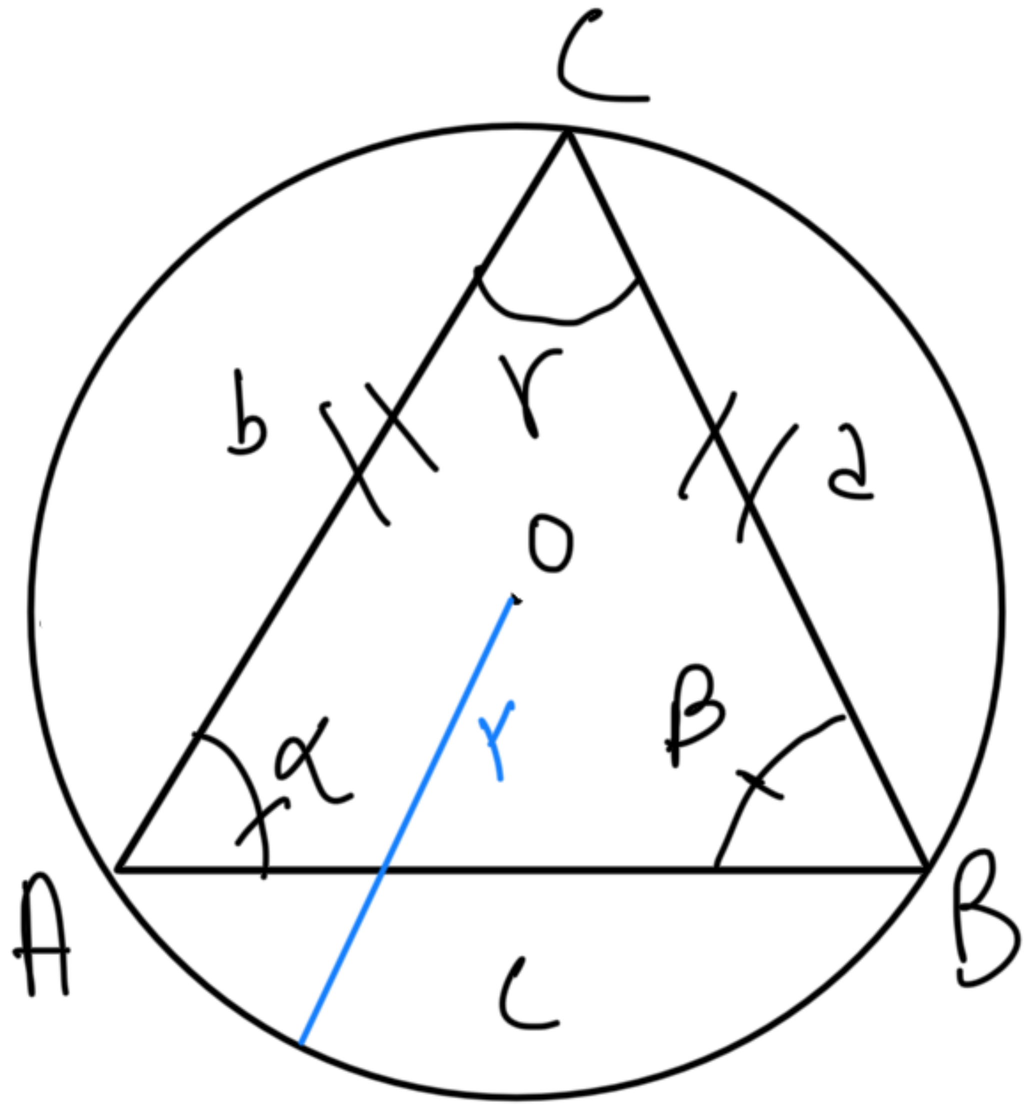
●○○
289 Verifica che, tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di perimetro massimo è quello equilatero.

Dati:

Considero un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio r



Richiesta:

Verificare che tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza quello di perimetro massimo é equilatero

Svolgimento:

$$2p_{\overset{\Delta}{ABC}} = \underbrace{b+a}+c$$

$a = b$ perché

$\overset{\Delta}{ABC}$ isoscele quindi

$\hat{ABC}$ isoscele quindi:

$$2p_{\hat{ABC}} = 2a + c$$

Applico il teorema dei seni su $\hat{ABC}$:

$$a = b$$

$$2r = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\pi - 2\alpha)}$$

$$\alpha = \beta$$

PER SOMMA DI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO

quindi:

|

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$2r = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$$

$\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)$

Calcolo a e c in funzione di α

$a = 2r \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$

$c = 2r \operatorname{sen}(2\alpha)$

$$\boxed{2p_{\overset{\Delta}{ABC}} = 2a + c}$$

$$2p_{\overset{\triangle}{ABC}} = 2 \cdot 2r\,\text{sen}(\alpha) + 2r\,\text{sen}(2\alpha)$$

$$= 4r\,\text{sen}(\alpha) + 2r\,\text{sen}(2\alpha) = P(\alpha)$$

calcolo la derivata prima di $P(\alpha)$ per trovare eventuali punti di massimo con $0 < \alpha < \pi$

$$P'(\alpha) = 4r\cos(\alpha) + 2r \cdot 2\cos(2\alpha)$$

$$P'(\alpha) > 0$$

$$4r\cos(\alpha) + 4r\cos(2\alpha) > 0$$

$$\frac{r\cos(\alpha)+r\cos(2\alpha)}{4r} > \frac{0}{4r}$$

$$\cos(\alpha)+\cos(2\alpha) > 0$$

$$\cos(\alpha)+2\cos(\alpha)^2-1 > 0$$

PONGO: $\cos(\alpha) = K$

$$2K^2+K-1>0$$

$$(K+1)\cdot(2K-1)>0$$

$$K<-1 \ \vee \ K>\frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha)<-1 \ \vee \ \cos(\alpha)>\frac{1}{2}$$

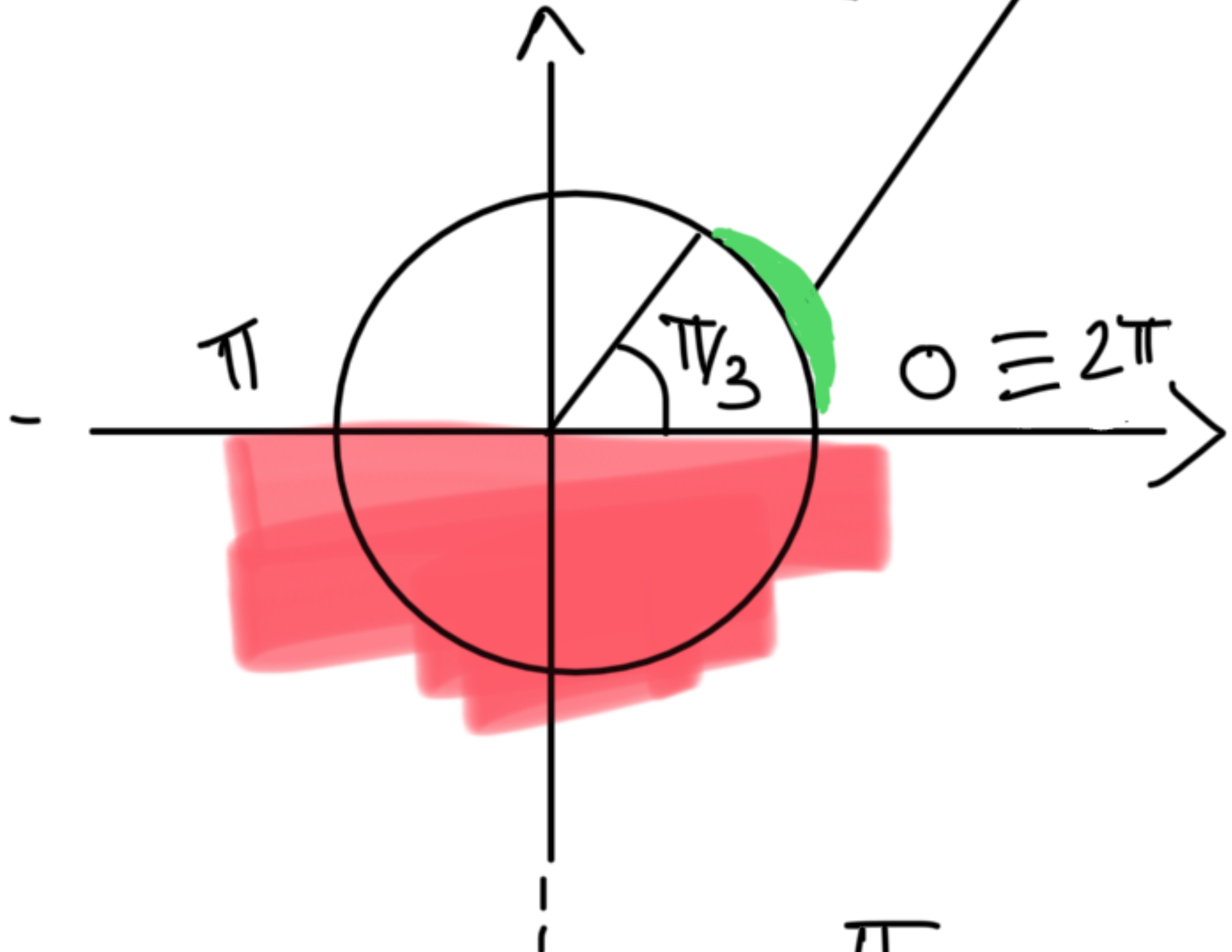
$\nexists \alpha \in \mathbb{R}$

RESTRIZIONI

$\downarrow$

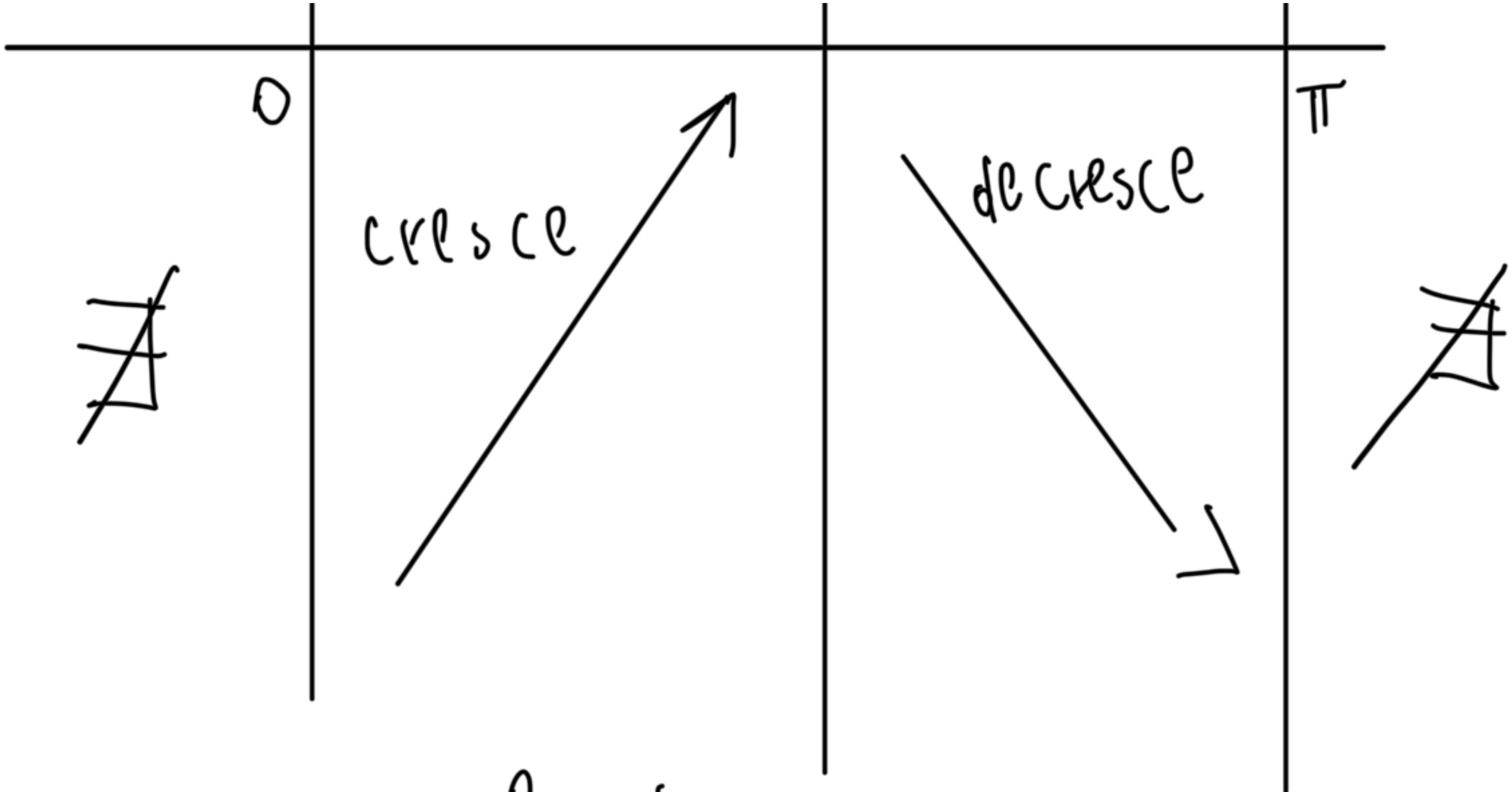
$0 < \alpha < \pi$

$\cos(\alpha) > \frac{1}{2} \rightarrow 0 < \alpha < \pi/3$



$P'(\alpha) > 0 \Rightarrow 0 < \alpha < \pi/3$

$\pi/3$



Punto di massimo in $\pi/3 \equiv 60°$

Affinché $A\hat{B}C$ abbia il

perimetro massimo α deve

essere uguale a $60°$.

$\alpha = \beta = 60$ allora $\gamma = \underbrace{180° - 2\cdot 60°}_{60°}$

quindi $\alpha = \beta = \gamma$

si deduce che

il triangolo isoscele con

perimetro massimo inscritto

in una circonferenza è

equilatero

(c.v.d)