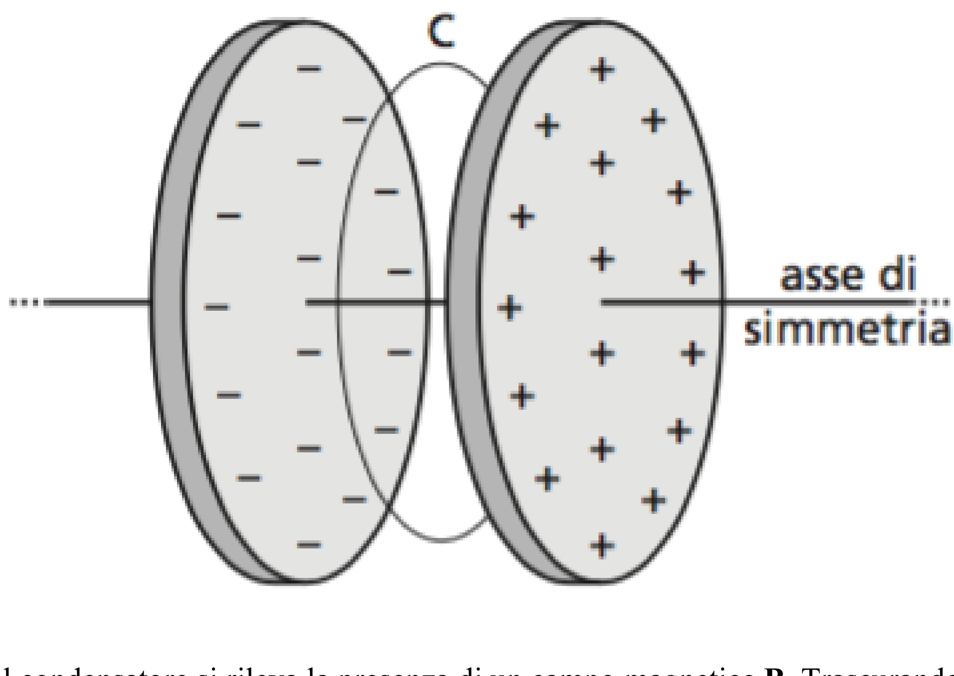
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di Matematica e Fisica

Sessione ordinaria 2019 - Seconda prova scritta

Problema 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico **B**. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza *r* dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di **B**, espressa in tesla (T), varia secondo la legge

$$B = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\ r\ ,\quad \text{con } r \le R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

1. Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di **B** e del campo elettrico **E** nei punti interni al condensatore?

Soluzione

Per determinare le unità di misura delle costanti a e k, è sufficiente eseguire un'analisi dimensionale. Per prima cosa, si può notare che la somma di due quantità fisiche è possibile soltanto se esse hanno entrambe la stessa unità di misura. Da ciò si conclude che [a]=s, in quanto tale costante viene espressa nella stessa unità di misura di t, cioè in secondi. Per quanto riguarda invece k, si può esplicitarla partendo dall'equazione del campo magnetico:

$$k := solve\left(B = \frac{k\cdot t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\cdot r, k\right)$$

$$\frac{B\sqrt{(a^2+t^2)^3}}{t\,r} \tag{1.1}$$

Sapendo inoltre che il campo magnetico si misura in tesla, che in unità di misura del S.I. equivale a $1\ T = 1\ \frac{kg}{C\cdot s}$, si conclude che $[k] = \frac{kg\cdot s}{C\cdot m} = \frac{T\cdot s^2}{m}$. Il campo magnetico è dovuto alla corrente di spostamento che si crea tra le piastre del condensatore, a causa della presenza di un campo elettrico variabile nel tempo. Il campo elettrico **E**(t) e il campo magnetico **B** sono ortogonali: il campo magnetico è generato dal campo elettrico variabile nel tempo.

2. Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di **B** lungo C e da essa ricavare che il flusso di **E**, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\boldsymbol{E}) = \frac{2\cdot k\cdot\pi\cdot r^2}{\mu_0\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\boldsymbol{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

Soluzione

La circuitazione *circ* lungo la circonferenza C è semplicemente data dal prodotto tra la circonferenza C e il valore del campo magnetico, poichè **B** è costante nello spazio lungo il circuito scelto (essendo dipendente solo dal raggio r), data la simmetria radiale del problema.

$C := 2\cdot\pi\cdot r$

$$2\,\pi\,r \tag{2.1}$$

$$B := \frac{k\cdot t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\ r$$

$$\frac{k\,t\,r}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}} \tag{2.2}$$

$circ := C\cdot B$

$$\frac{2\,\pi\,r^2\,k\,t}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}} \tag{2.3}$$

Dalle equazioni di Maxwell, sappiamo che la circuitazione è proporzionale alla variazione temporale del flusso del campo elettrico attraverso la seguente legge:

$$circ = \mu_0\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{E})}{\mathrm{d}\,t}$$

Possiamo quindi determinare il valore del flusso, risolvendo l'equazione differenziale:

$$\mu_0\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{E})}{\mathrm{d}\,t} = \frac{2\,\pi\,r^2\,k\cdot t}{\left(a^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

che porta dunque a risolvere l'integrale

$$\Phi_{indef} := \int \frac{circ}{\mu_0\cdot\varepsilon_0}\,\mathrm{d}t \text{ assuming } a > 0,\ k > 0$$

$$-\frac{2\left(a^2+t^2\right)\pi\,r^2\,k}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}\,\mu_0\,\varepsilon_0} \tag{2.4}$$

Calcolando l'integrale tra 0 e t si ottiene:

$\Phi_{tot} := \Phi_{indef} - eval\left(\Phi_{indef}, t=0\right)$ assuming $a > 0$

$$-\frac{2\left(a^2+t^2\right)\pi\,r^2\,k}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}\,\mu_0\,\varepsilon_0} + \frac{2\,a^2\,\pi\,r^2\,k}{\sqrt{a^6}\,\mu_0\,\varepsilon_0} \tag{2.5}$$

che, con alcune minime semplificazioni, corrisponde con quanto indicato nel testo:

$\Phi_{tot} := \dfrac{2\cdot k\cdot\pi\cdot r^2}{\mu_0\cdot\varepsilon_0}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}}+\dfrac{1}{a}\right)$

$$\frac{2\,k\,\pi\,r^2\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}+\frac{1}{a}\right)}{\mu_0\,\varepsilon_0} \tag{2.6}$$

Il rapporto tra il campo elettrico e il suo flusso nel nostro caso, date tutte le approssimazioni in gioco, è dato dalla seguente equazione:

$$\Phi_{tot} = E\cdot\pi\cdot r^2$$

Dunque

$E := \dfrac{\Phi_{tot}}{\pi\cdot r^2}$

$$\frac{\Phi_{tot}}{\pi\,r^2} \tag{2.7}$$

La differenza di potenziale tra le piastre è data semplicemente dalla seguente relazione:
$\Delta V := E \cdot d$

$$\frac{\Phi_{tot}\, d}{\pi\, r^2} \tag{2.8}$$

ovvero

$$\Delta V := \frac{2 \cdot k \cdot d \left(-\frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} + \frac{1}{a} \right)}{\mu_0\, \varepsilon_0}$$

$$\frac{2\, k\, d \left(-\frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} + \frac{1}{a} \right)}{\mu_0\, \varepsilon_0} \tag{2.9}$$

Per studiare il comportamento del campo magnetico al trascorrere del tempo, è necessario calcolarne il limite nel caso in cui $t \rightarrow +\infty$:

$$B := \frac{kt}{\sqrt{\left(t^2 + a^2\right)^3}}\, r$$

$$\frac{kt\, r}{\sqrt{\left(a^2 + t^2\right)^3}} \tag{2.10}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B$$

$$0 \tag{2.11}$$

Per capire se questo abbia senso fisicamente, è necessario analizzare anche il comportamento del campo elettrico ad un tempo infinito (perché è la variazione del campo elettrico a generare il campo magnetico):

$$E := -\frac{2\, k \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{a^2 + t^2} \right)}{\sqrt{a^2 + t^2}\, \mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{a^2}}$$

$$-\frac{2\, k \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{a^2 + t^2} \right)}{\sqrt{a^2 + t^2}\, \mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{a^2}} \tag{2.12}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E$$

$$\frac{2\, k}{\mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{a^2}} \tag{2.13}$$

Il campo elettrico è (asintoticamente) costante nel tempo e uniforme nello spazio. Dalle leggi di Maxwell, risulta che pertanto (asintoticamente) nessun campo magnetico può essere generato.

3. Per $a > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{\left(t^2 + a^2\right)^3}}$.

Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine.

Studiare la funzione F individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

Soluzione

Entrambe le funzioni sono continue e derivabili in $\mathbb{R}$. Rappresentiamo dapprima le due funzioni per studiare il loro comportamento (ponendo la costante a uguale a 2).

$assume(\ a > 0)$

$$f := -\frac{t}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

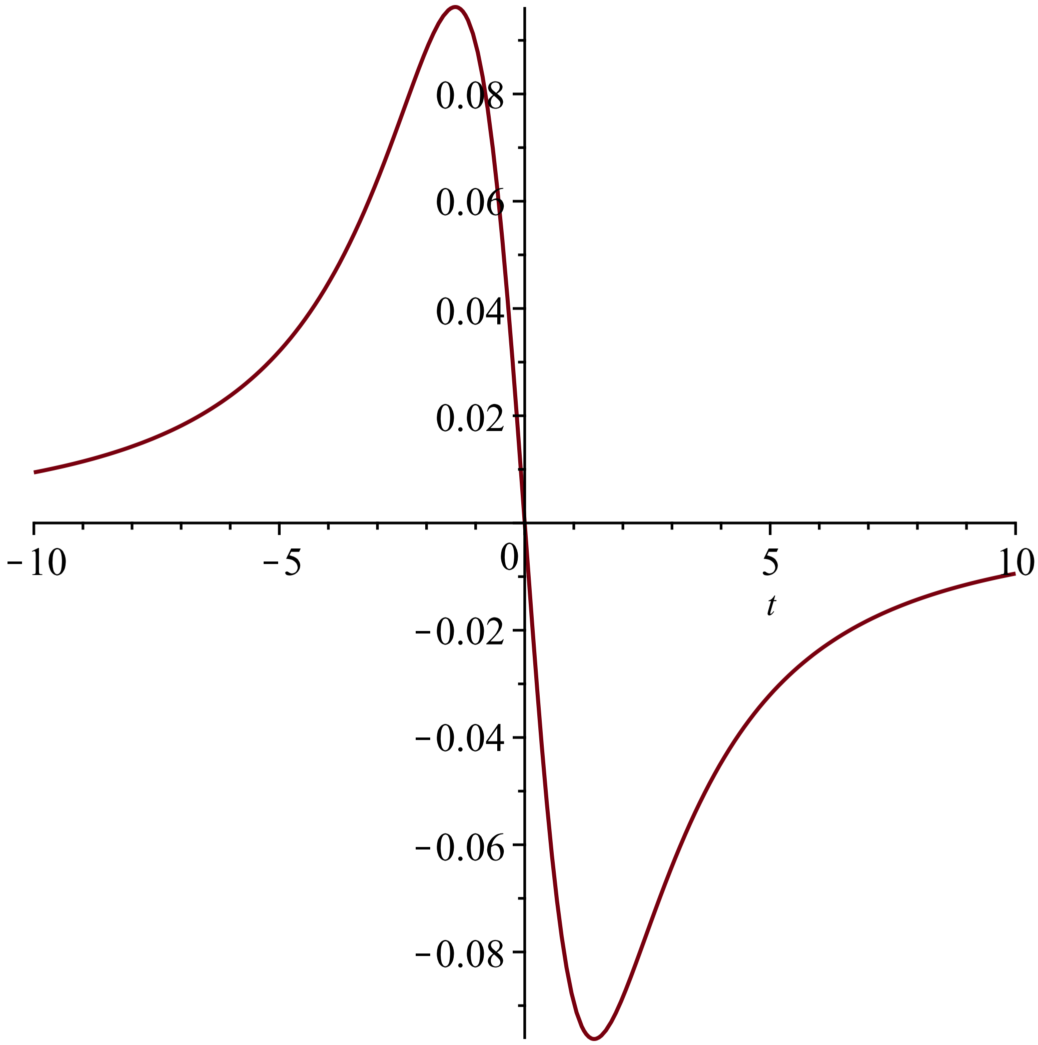
$$-\frac{t}{(a\sim^2 + t^2)^{3/2}} \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$F := \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$$

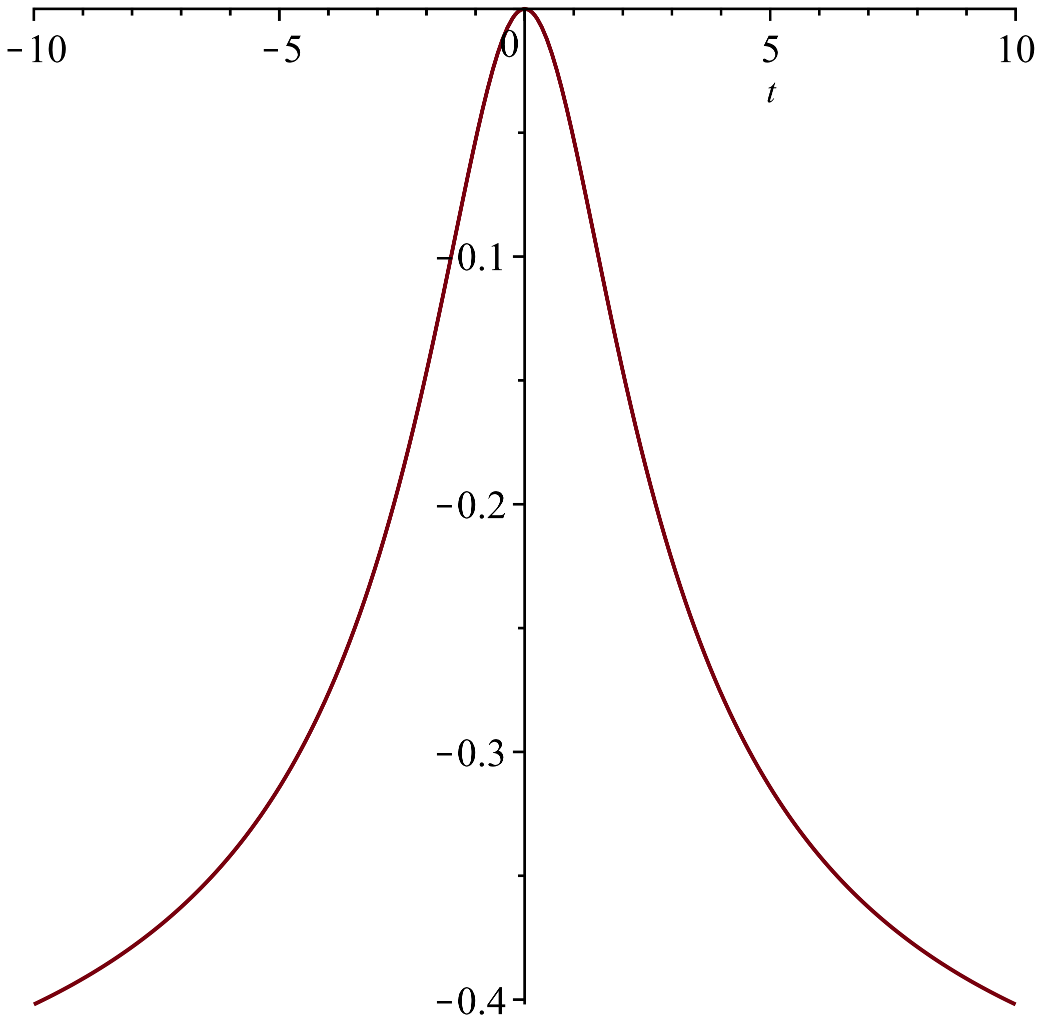
$$\frac{1}{\sqrt{a\sim^2 + t^2}} - \frac{1}{a\sim} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Abbozziamo i grafici di queste due funzioni per avere un'idea del loro comportamento.
Per questi grafici fissiamo il valore $a = 2$.

$plot(eval(f(t), a = 2), t = -10..10)$



$plot(eval(F(t), a=2), t=-10..10)$



Per verificare che F sia la primitiva di f, è sufficiente verificare
$is(diff(F, t) = f)$

$$true \tag{3.3}$$

Per verificare che il grafico di F passi per l'origine, bisogna verificare che per $t = 0$ la funzione F deve essere nulla
$F_0 := simplify(eval(F, t = 0))$

$$0 \tag{3.4}$$

Studiamo ora la funzione $F(t)$.
• **Dominio**:
- $t \in \mathbb{R}$

$$t \in real \tag{3.5}$$

• **Simmetrie**: verifichiamo la simmetria pari

- $evalb(eval(F, t = -t) = F)$

$$true \tag{3.6}$$

Concludiamo che la funzione è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.
• **Limiti e asintoti**:
- $\lim_{t \to +\infty} F, \lim_{t \to -\infty} F$

$$-\frac{1}{a\sim}, -\frac{1}{a\sim} \tag{3.7}$$

Possiamo quindi concludere che la funzione ha un asintoto orizzontale $y=-\frac{1}{a}$ per $t \to \pm\infty$.

- **Estremi**: La derivata della funzione F è rappresentata dalla funzione f data nel testo del problema. Perciò, per studiare minimi e massimi della funzione, vediamo per quali valori di t la funzione f si annulla.

$solve(f=0, t)$

$$0 \tag{3.8}$$

Pertanto, scopriamo che un punto stazionario della funzione si trova nell'origine: (0,0).
Per capire la natura del punto stazionario, valutiamo
$eval(diff(f, t), t=0)$

$$-\frac{1}{(a\sim^2)^{3/2}} \tag{3.9}$$

Essendo negativo, la funzione F ha localmente la concavità verso il basso, dunque il punto è un punto di massimo

- **Punti di flesso**: Per studiare i punti di flesso della funzione F, è necessario calcolarne la derivata seconda, ossia la derivata prima di f.

$f\_sec := \frac{d}{dt} f$

$$-\frac{1}{(a\sim^2+t^2)^{3/2}} + \frac{3\,t^2}{(a\sim^2+t^2)^{5/2}} \tag{3.10}$$

I punti di flesso sono quelli in cui la derivata seconda si annulla:
$x_{F1}, x_{F2} := solve(f\_sec = 0, t)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\sim, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\sim \tag{3.11}$$

I valori ottenuti corrispondono a quelli dati nel testo del problema.
Calcoliamo inoltre le ordinate dei punti di flesso:
$y_{F1} := eval\left(F, t=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\right)$

$$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{a\sim^2}} - \frac{1}{a\sim} \tag{3.12}$$

$y_{F2} := eval\left(F, t=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\right)$

$$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{a\sim^2}} - \frac{1}{a\sim} \tag{3.13}$$

La pendenza delle rette tangenti al grafico di F nei due punti di flesso si può determinare semplicemente calcolando il valore di f nei rispettivi punti:
$m_1 := eval\left(f, t=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\right)$

$$\frac{2}{9}\,\frac{a\sim\sqrt{3}}{\left(a\sim^{2}\right)^{3/2}} \tag{3.14}$$

$m_2 := eval\left(f, t = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ a\right)$

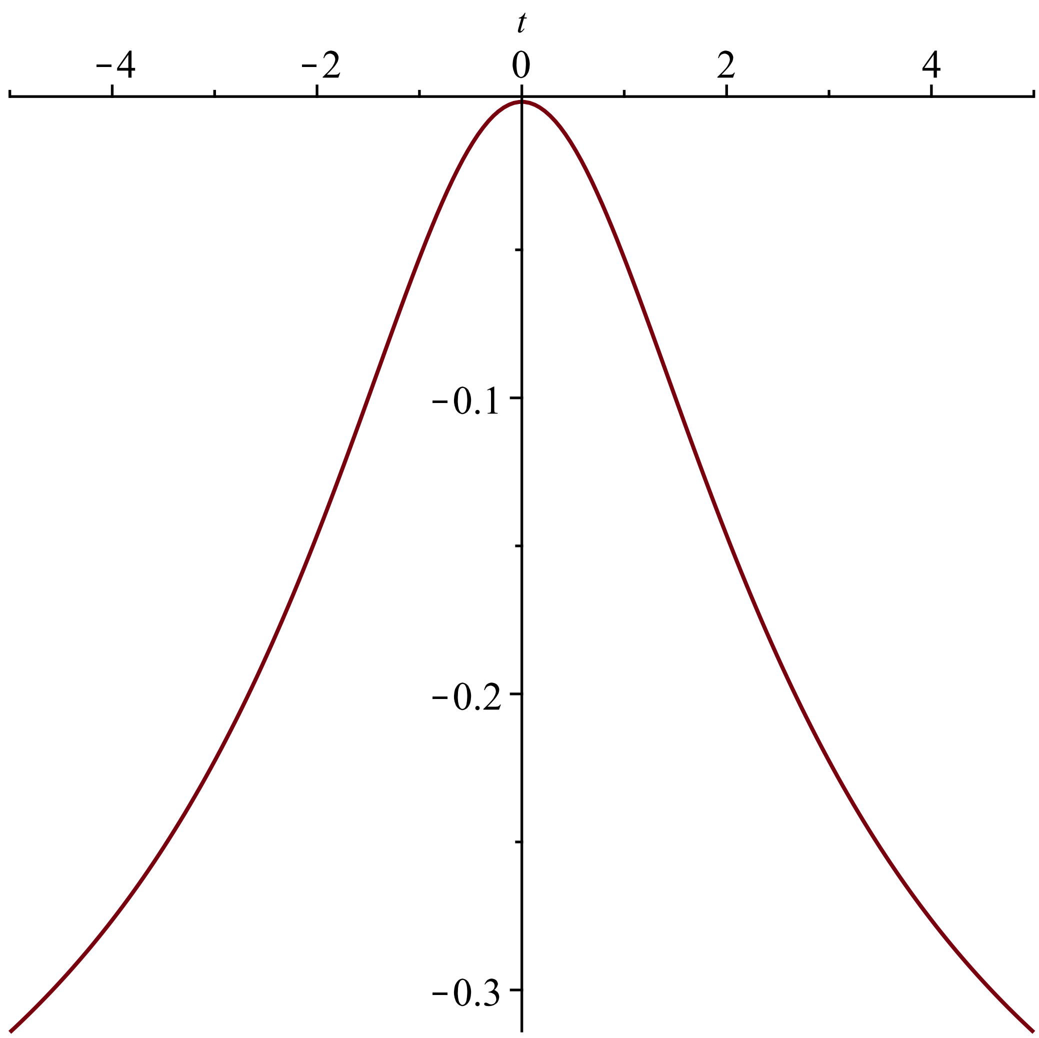
$$-\frac{2}{9}\,\frac{a\sim\sqrt{3}}{\left(a\sim^{2}\right)^{3/2}} \tag{3.15}$$

4. Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{+b} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Soluzione

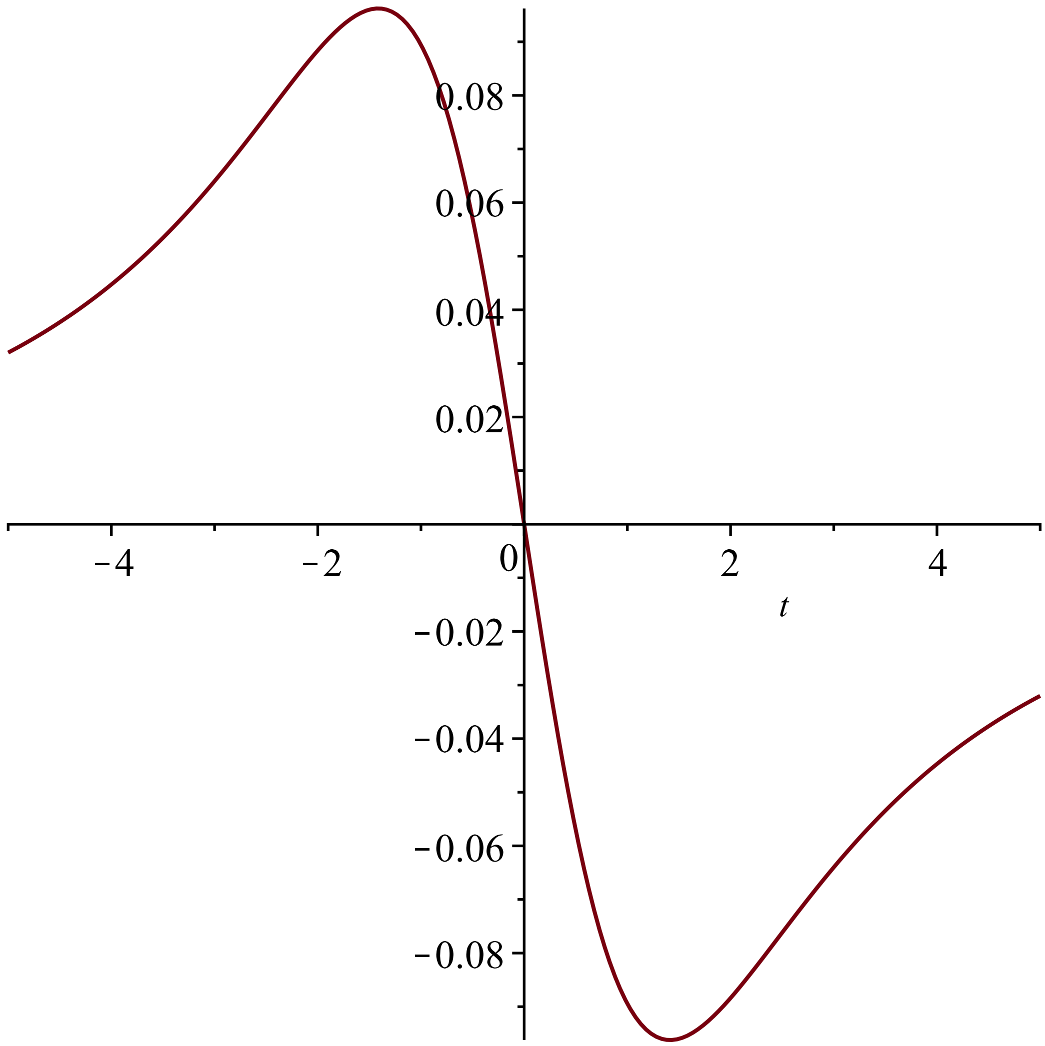
Il grafico di F per il valore di $a = 2$ è il seguente

$plot(eval(F, a = 2), t = -5..5)$



Il grafico di f per il valore di $a = 2$ è il seguente

$plot(eval(f, a=2), t=-5..5)$



Per dedurre il grafico di *f (t)* da quello di *F(t)*, notiamo che:

- F è pari, dunque f è dispari. Studieremo le prprietà solo per $t > 0$.
- F è strettamente decrescente nell'intervallo compreso tra $(0, +\infty) \Rightarrow f$ è negativa nello stesso intervallo.
- F ha un asintoto orizzontale, dunque f ha come asintoto orizzontale l aretta $y = 0$.
- Il massimo di F coincide con lo 0 di f.
- I punti di flesso di F corrispondono ai punti stazionari di f:

  f ha un minimo locale in $t = + \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

La funzione f è dispari, perciò ogni integrale calcolato su un intervallo simmetrico rispetto all'origine (come ad esempio l'intervallo $[-b, b]$) è nullo.

$$is\left(\int_{-b}^{+b} f \, \mathrm{d}t = 0\right)$$

$$true \tag{4.1}$$

Per calcolare l'area richiesta, è sufficiente calcolare il valore dell'integrale di f tra il suo minimo locale e l'origine e moltiplicarlo per due:

$$Area := 2\cdot\int_{-x_{F1}}^{0} f\,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{6}-3}{a\sim} \qquad \textbf{(4.2)}$$