



UNIONE MATEMATICA ITALIANA
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE,
 DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA



T1

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

23 novembre 2017

- La prova è costituita da 16 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E). Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.
- Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.
- Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
 Buon lavoro e buon divertimento!

NOME _____ COGNOME _____ CLASSE _____

data di nascita: _____ mail (facoltativa): _____

1	2	3	4

5	6	7	8

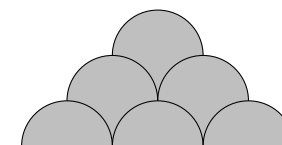
9	10	11	12

13	14	15	16

- Qual è la cifra delle centinaia di 5^{2017} ?
 (A) 5 (B) 2 (C) 1 (D) 3 (E) 6
- Attorno a un tavolo sono sedute 4 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere (che dice sempre la verità) o un furfante (che mente sempre). Ognuno dei presenti afferma: "Delle altre tre persone sedute a questo tavolo insieme a me, i furfanti sono esattamente due". Qual è il numero complessivo di furfanti che sono seduti al tavolo?
 (A) nessuno (B) sicuramente 2 (C) sicuramente tutti e 4
 (D) sicuramente 1 (E) gli elementi forniti non sono sufficienti per stabilirlo

- Quante sono le coppie di numeri interi positivi (m, n) tali che $m^n = 2^{12}$?
 (A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 6 (E) 4
- Ci sono 2017 stanze disposte in fila. La prima contiene 2017 persone e tutte le altre sono inizialmente vuote. Ogni minuto, se una stanza contiene più di una persona, una persona a caso che si trova in quella stanza si sposta nella stanza successiva. Dopo 1001 minuti, quante sono le stanze vuote?
 (A) 1017 (B) 1515 (C) 1016 (D) 1517 (E) 1015
- Sia n un numero intero che è multiplo di 1000 ma non di 10000. Quale di queste affermazioni è sicuramente vera?
 (A) $n/3$ è un numero la cui parte intera termina con le cifre 333 o 666.
 (B) $n/8$ è un numero intero che termina con le cifre 25 o 75.
 (C) $n/125$ è un numero intero che termina con le cifre 8 o 6.
 (D) n è divisibile per 16.
 (E) Nessuna delle precedenti.
- Marco scrive in una riga i numeri interi da 1 a 64 (inclusi). Poi inizia a cancellarne alcuni, in questo modo: cancella il numero 1, lascia il 2, cancella il 3, lascia il 4, etc. Arrivato in fondo alla riga, la ripercorre al contrario, cancellando il primo numero che trova tra quelli rimasti, lasciando poi il secondo, etc. Continua quindi a ripercorrere la riga alternativamente nei due sensi, cancellando ogni volta un numero sì e un numero no, fino a quando sulla lavagna resta un solo numero. Qual è quest'ultimo numero rimasto?
 (A) 22 (B) 14 (C) 6 (D) 54 (E) 38

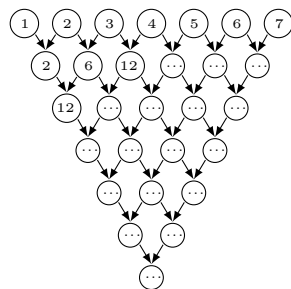
- Le sei semicirconferenze presenti nella figura a lato hanno tutte raggio 1 cm. Quanti cm^2 misura l'area della regione ombreggiata?
 (A) $8 + 3\pi/4$ (B) $9 + \pi/2$ (C) $9 + \pi/3$
 (D) $6 + 3\pi/2$ (E) $10 + \pi/6$



- Quante sono le coppie di interi positivi (a, b) , con $a < b$, tali che $MCD(a, b) = 2$ e $mcm(a, b) = 60$?
 (A) 0 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 6
- Sia ABC un triangolo e sia D un punto sul lato BC . Supponiamo che si abbia $\widehat{BAD} = \widehat{ACD}$ e $\widehat{CAD} = \widehat{ABD}$. Quale tra le seguenti affermazioni è certamente vera?
 (A) ABC è un triangolo equilatero
 (B) ABC è un triangolo ottusangolo
 (C) ABC è un triangolo isoscele
 (D) ABC è un triangolo scaleno
 (E) ABC è un triangolo rettangolo

10. Quanti sono i numeri primi tali che, se si cancella da essi un qualsiasi gruppo di cifre anche non consecutive (senza però cancellarle tutte) e si leggono le cifre rimanenti nell'ordine in cui si trovano, si ottiene ancora un numero primo?
(Si ricorda che 1 non è un numero primo.)
(A) 7 (B) 3 (C) 5 (D) 8 (E) 10
11. L'area del triangolo ABC è pari a 60 m^2 . Siano D, E i punti interni al lato AB tali che $AD = DE = EB$ e siano F, G, H i punti interni ad AC tali che $AF = FG = GH = HC$. Qual è l'area del triangolo AEH ?
(A) 20 m^2 (B) 45 m^2 (C) 30 m^2 (D) 40 m^2 (E) 24 m^2
12. Andrea e Chiara si sfidano lanciando più volte un dado. Ogni volta che esce un numero dispari fa un punto Andrea, quando esce un numero pari fa un punto Chiara. Vince la partita chi arriva per primo a 5 punti. Dopo 6 lanci, Andrea è in vantaggio per 4 a 2. Qual è la probabilità che sia Chiara a vincere la partita?
(A) $1/8$ (B) $1/3$ (C) $1/6$ (D) $1/4$ (E) $1/5$
13. Una bottiglia da un litro di bibita all'arancia è costituita per l'80% da acqua e per il 20% da succo d'arancia. Gianni vuole sostituire un po' della bibita contenuta in questa bottiglia con del succo d'arancia, in modo da ottenere una nuova bibita che sia costituita per il 50% da succo d'arancia. Quanti ml della bibita iniziale Gianni deve sostituire con del succo d'arancia?
(A) 300 (B) 400 (C) 375 (D) 320 (E) 350
14. Il trapezio isoscele $ABCD$, di basi AB e CD , è inscritto in una circonferenza di raggio 13 m. Si sa che il centro della circonferenza è interno al trapezio $ABCD$ ed inoltre $\overline{AB} = 24 \text{ m}$, $\overline{CD} = 10 \text{ m}$. Qual è l'area di $ABCD$?
(A) 272 m^2 (B) 289 m^2 (C) 170 m^2 (D) 306 m^2 (E) 340 m^2
15. Caterina inizia a scrivere tutti i numeri interi positivi, uno di seguito all'altro: 12345678910111213... Quale cifra occuperà la 2017^{a} posizione?
(A) 8 (B) 5 (C) 1 (D) 7 (E) 2

16. Dopo aver disegnato uno schema triangolare come quello qui a fianco, Alberto scrive nei cerchi della riga più in alto i numeri interi da 1 a 7. Poi, dentro ciascuno degli altri cerchi, scrive il prodotto dei numeri contenuti nei due cerchi sopra di esso che sono ad esso collegati con una freccia (dunque ottiene 2, 6, 12, ... e così via). Con quanti zeri terminerà il numero che dovrà scrivere nel cerchio più in basso?
(A) 15 (B) 12 (C) 16 (D) 13 (E) 14



Giochi di Archimede 2017

Soluzioni gara biennio (versione T1)

- (1) La risposta corretta è (C).

Si vede facilmente che $5 \cdot (1000k + 125) = 5000k + 625$ e che $5 \cdot (1000k + 625) = 5000k + 3125 = 1000(5k + 3) + 125$. Poiché $5^3 = 125$, le potenze con esponente dispari di 5, dalla terza in poi, termineranno con le cifre 125, mentre quelle con esponente pari termineranno con 625. Possiamo concludere che la cifra delle centinaia di 5^{2017} è 1.

- (2) La risposta corretta è (E).

Se al tavolo sono seduti due furfanti e due cavalieri, ogni cavaliere dice effettivamente il vero, perché vede due furfanti, e ogni furfante dice effettivamente il falso, perché vede solo un furfante. Allo stesso modo, se al tavolo sono seduti solo furfanti, ognuno vede tre furfanti, e quindi dice effettivamente il falso. Gli elementi forniti non permettono quindi di concludere se al tavolo siano presenti due o quattro furfanti.

- (3) La risposta corretta è (D).

Per il teorema di fattorizzazione unica, m deve essere una potenza di 2. Se $m = 2^k$, allora $m^n = (2^k)^n = 2^{kn}$ e $kn = 12$. Le uniche scelte per n sono i sei divisori di 12: $n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$, che corrispondono ai valori $m = 2^{12}, 2^6, 2^4, 2^3, 2^2, 2$, rispettivamente.

- (4) La risposta corretta è (B).

Con una facile induzione, si vede che dopo $k < 2017$ minuti la prima stanza contiene $2017 - k$ persone, mentre le k persone che ne sono uscite sono disposte due in ciascuna delle $\lfloor k/2 \rfloor$ stanze successive ed eventualmente una in quella immediatamente successiva se k è dispari. Dopo 1001 minuti, la prima stanza conterrà 1016 persone, le successive 500 conterranno due persone e la stanza numero 502 conterrà una sola persona. Le rimanenti $2017 - 502 = 1515$ stanze saranno allora vuote.

- (5) La risposta corretta è (E).

Per escludere le altre, basta osservare che $3000/3 = 1000$ non termina con le cifre 333 o 666; $8000/8 = 1000$ non termina con le cifre 25 o 75; $3000/125 = 24$ non termina con la cifra 8 o 6; 1000 non è multiplo di 16.

- (6) La risposta corretta è (A).

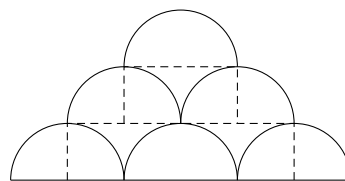
Indichiamo con x_k l'ultimo numero rimasto dopo aver proceduto come descritto con i numeri tra 1 e 2^k . Se si procede con i numeri tra 1 e 2^{k+1} , al primo passaggio rimangono solo i 2^k numeri pari, e i successivi k passaggi selezionano il numero pari di posizione x_k **contando dal fondo**. Pertanto, $x_{k+1} = 2(2^k - x_k + 1) = 2^{k+1} - 2x_k + 2$.

Sapendo che $x_0 = 1$, si ottiene rapidamente

$$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = 6, x_5 = 22, x_6 = 22.$$

- (7) La risposta corretta è (D).

Possiamo ripartire la regione nel modo indicato in figura dalle linee tratteggiate. L'area complessiva dei due rettangoli è allora 6 cm^2 , mentre quella dei settori circolari è $\frac{3}{2} \pi \text{ cm}^2$.



(8) La risposta corretta è (B).

Il prodotto di a e b è $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Poiché $MCD(a, b) = 2$, uno dei due numeri avrà nella sua fattorizzazione un solo fattore 2, mentre l'altro ne avrà 2; gli altri fattori primi 3 e 5 sono presenti nel prodotto ab una sola volta, e non contribuiranno quindi al MCD . Le coppie di interi che si ottengono sono allora:

$$(2, 60), \quad (6, 40), \quad (10, 12), \quad (4, 30).$$

(9) La risposta corretta è (E).

Poiché l'angolo \widehat{BAC} è uguale alla somma degli altri due angoli di ABC , segue che \widehat{BAC} è un angolo retto. Si vede inoltre facilmente che nessuna delle possibilità indicate nelle altre risposte è sicuramente vera.

(10) La risposta corretta è (D).

I numeri primi di una cifra sono 2, 3, 5, 7. Ogni numero primo con la proprietà indicata dovrà quindi avere queste come sole cifre, perché cancellandole tutte tranne una si dovrà ottenere un numero primo.

Inoltre, 2 e 5, se presenti, potranno apparire solamente nella prima posizione; se così non fosse, cancellando tutte le cifre successive al 2 o al 5 si otterrebbe un numero pari o multiplo di 5 con almeno due cifre, che non può essere primo. In particolare, solo una cifra tra 2 e 5 può essere presente nel numero, ed esclusivamente nella prima posizione. Una cifra non può nemmeno essere presente più di una volta, altrimenti cancellando tutte le cifre tranne due uguali si otterrebbe un multiplo di 11, che non può essere primo.

Gli unici numeri di due cifre che soddisfano le condizioni appena descritte sono 23, 27, 37, 53, 57, 73. Di questi, solamente 23, 37, 53, 73 sono primi.

Per quanto riguarda i numeri con almeno tre cifre:

- Se non contengono né la cifra 2, né la cifra 5, sono composti solamente da cifre 3 e 7 e devono necessariamente avere cifre ripetute. Non possono quindi soddisfare le proprietà indicate.
- Se hanno 2 come prima cifra, non possono avere né 5 né 7 che dovrebbe essere in prima posizione - né 7 - poiché 27 non è primo - come altre cifre. Ogni cifra successiva al 2 è quindi un 3, ma allora hanno necessariamente cifre ripetute e non possono quindi soddisfare le proprietà indicate.
- Allo stesso modo, se hanno 5 come prima cifra, ogni cifra successiva deve essere un 3, e sono necessariamente presenti cifre ripetute.

In conclusione, gli unici numeri che soddisfano la proprietà descritta sono 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73.

(11) La risposta corretta è (C).

Dato che AE è pari ai $2/3$ di AB , l'area del triangolo AEC è $2/3$ di quella di ABC (infatti l'altezza condotta da C è la stessa per i due triangoli). Allo stesso modo, l'area di AEH è pari ai $3/4$ dell'area di AEC . Pertanto l'area di AEH è pari a $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ dell'area del triangolo ABC .

(12) La risposta corretta è (A).

Chiara vince la partita solo nel caso in cui faccia un punto con tutti i tre lanci successivi. Essendo gli eventi indipendenti, la sua probabilità di vittoria è $(1/2)^3 = 1/8$.

(13) La risposta corretta è (C).

La bottiglia contiene inizialmente 800 ml di acqua e 200 ml di succo d'arancia. Dopo aver sostituito x ml di bibita con del succo d'arancia, la bibita conterrà $800 - 4x/5$ ml di acqua. Affinché l'acqua sia la metà del contenuto della bottiglia, deve essere $800 - 4x/5 = 500$, da cui $x = 1500/4 = 375$.

(14) La risposta corretta è (B).

Indichiamo con O il centro della circonferenza circoscritta al trapezio, con H il punto medio di AB e con K il punto medio di CD . Con il teorema di Pitagora si ottiene (misurando in m) $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ e $OK = \sqrt{OC^2 - CK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. L'altezza del trapezio è quindi $OH + OK = 12 + 5 = 17$ e la sua area è $\frac{(24+10) \cdot 17}{2} = 289$.

(15) La risposta corretta è (D).

Caterina scrive 9 numeri di una cifra, per un totale di 9 cifre. Poi 90 numeri di due cifre, quelli tra 10 e 99 - per un totale di 180 cifre. A questo punto, avrà scritto 189 cifre, e rimarranno $2017 - 189 = 1828$ cifre da scrivere.

I numeri successivi sono di tre cifre. Poiché $1828 = 3 \cdot 609 + 1$, la cifra nella 2017^a posizione sarà la prima cifra del seicentodecimo numero di tre cifre. Tale numero è 709, e la sua prima cifra è 7.

(16) La risposta corretta è (A).

Il numero di zeri finali di un numero è il minimo tra l'esponente di 2 e quello di 5 nella sua fattorizzazione in primi. Iniziamo calcolando l'esponente di 5 presente nella fattorizzazione in primi di ciascun numero scritto, ricordando che in un prodotto gli esponenti si sommano. Sappiamo che nella prima riga gli esponenti di 5 sono 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, e quindi nella seconda 0, 0, 0, 1, 1, 0; nella terza 0, 0, 1, 2, 1; nella quarta 0, 1, 3, 3; nella quinta 1, 4, 6; nella sesta 5, 10; infine nella settima 15. Procedendo allo stesso modo con il primo 2, si vede facilmente che la potenza di 2 che divide l'ultimo numero è ben superiore a 2^{15} . Il numero scritto nel cerchio più in basso termina quindi con esattamente 15 zeri.