

241 Risolvi i seguenti quesiti.

- a. Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco in $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e per direttrice la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}$.
- b. Sia A il punto di intersezione della parabola con l'asse y, e siano B e C, con $x_B < x_C$, i punti di intersezione della parabola con l'asse x; discuti, al variare di k, l'esistenza e il numero dei punti di intersezione dell'arco \widehat{AC} di parabola con il fascio di rette di equazione $(k+1)x - y + 2 - k = 0$.
- c. Scrivi l'equazione della circonferenza tangente in A alla parabola e passante per il punto C.
[a. $y = x^2 - 3x + 2$; b. un punto per $k \leq -4 \vee k \geq 0$, nessun punto per altri valori di k; c. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$]

a. LA PARABOLA È IL LUOGO DEI PUNTI
EQUIDISTANTI DAL FUOCO F E DALLA DIRETTRICE,
PER CUI SI HA:

$$\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \left(y + \frac{1}{2}\right)$$

ELEVANDO AL QUADRATO AMBO I MEMBRI

OBTENIAMO:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 = y^2 + y + \frac{1}{4}$$

$$-y = -x^2 + 3x - \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$$

$$y = x^2 - 3x + \frac{8}{4}$$

$$y = x^2 - 3x + 2$$

b. DETERMINIAMO I PUNTI DI INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=x^2-3x+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0^2-3\cdot 0+2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

QUINDI A (0; 2)

$$\begin{cases} y=0 \\ y=x^2-3x+2 \end{cases} \rightarrow x^2-3x+2=0$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0) \text{ E } C(2; 0)$$

DISCUTIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ (k+1)x - y + 2 - k = 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

SOSTITUIAMO y NELLA SECONDA EQUAZIONE

$$(k+1)x - (x^2 - 3x + 2) + 2 - k = 0$$

SEMPLIFICANDO E RAGGRUPPANDO OTTENIAMO

$$kx + x - x^2 + 3x - 2 + 2 - k = 0$$

$$-x^2 + 4x + kx - k = 0$$

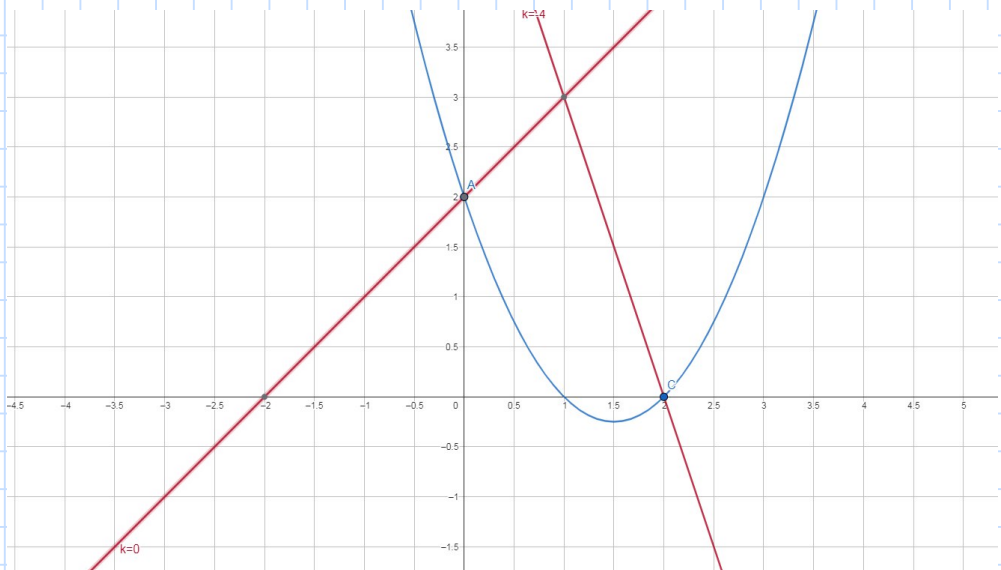
$$x^2 - 4x - kx + k = 0$$

$$x^2 + (-4 - k)x + k = 0$$

SE $-4 - k \geq 0 \rightarrow k \leq -4$ E $k \geq 0$

C'È SOLO UN PUNTO DI INTERSEZIONE
TRA L'ARCO \widehat{AG} E LA RETTA DEL FASCIO.

PER ALTRI VALORI DI k , NESSUN PUNTO.



g) DETERMINANDO L'EQUAZIONE DELLA RETTA t , TANGENTE ALLA PARABOLA NEL PUNTO A.

LA RETTA PASSA PER A

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = m(x - 0)$$

$$y = mx + 2$$

IMPONIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} y = mx + 2 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \rightarrow x^2 - 3x + 2 = mx + 2$$

$$x^2 - 3x - mx = 0$$

$$x^2 + (-3 - m)x = 0$$

$$\Delta = (-3 - m)^2 = 0$$

$$-3 - m = 0$$

$$m = -3$$

per la c.d. tangenza
 $\Delta = 0$

LA RETTA TANGENTE \bar{g} :

$$t: y = -3x + 2$$

ORA SI TRATTA DI SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA TANGENTE IN A A QUESTA RETTA E PASSANTE PER C.

L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA È:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

IMPONIAMO IL PASSAGGIO PER IL PUNTO A E C.

$$\begin{cases} 0^2 + 2^2 + 0x + 2b + c = 0 \\ 2^2 + 0^2 + 2a + b \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 + 2b + c = 0 \\ 4 + 2a + c = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c = -4 - 2b \\ 4 + 2a - 2b - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -4 - 2b \\ 2a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = -4 - 2b \end{cases}$$

L'EQUAZIONE DIVENTA

$$x^2 + y^2 + ax + ay - 4 - 2a = 0$$

IMPONIAMO CHE LA RETTA t SIA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + ay - 4 - 2a = 0 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 + (-3x + 2)^2 + ax + (-3x + 2)a - 4 - 2a = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + ax - 3ax + 2a - 4 - 2a = 0$$

$$10x^2 - 12x - 2ax = 0$$

$$5x^2 - 6x - ax = 0$$

$$5x^2 + (-6 - a)x = 0$$

PONIAMO LA CONDIZIONE DI TANGENZA $\Delta = 0$

$$(-6 - a)^2 = 0$$

$$-6 - a = 0$$

$$-a = 6 \rightarrow a = -6$$

QUINDI ABBIAMO CHE:

$$a = -6$$

$$b = a = -6$$

$$c = -4 - 2b = -4 - 2(-6) = -4 + 12 = 8$$

L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA È:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$$