Soluzione generale del problema sulle noci di cocco e la scimmia

1-In base al principio del buon ordinamento (o del minimo), bisogna trovare n numero di noci tale che $n = M (Q + 1) + (P + 1)$ dove M è il numero dei marinai sull'isola , P è la somma delle porzioni che ogni marinaio si è preso di notte e il numero Q+1 è la porzione che ogni marinaio si è preso la mattina seguente.

Quindi voglio dimostrare che per ogni $M \geq 2$ si ottiene N numero di noci minimo tale che:

se M è DISPARI allora $N = M* Q + (P + 1)$; se M è PARI allora $N = M* Q + (P + M + 1)$

[NB: il simbolo * è il segno di moltiplicazione]

2- Considero la seguente successione definita per ricorrenza (visionando la traccia del problema):

sia $k \geq 1$ naturale tale che:

$P_k = [(n-1) * (M - 1)^{K-1}] / M^K$

$R_k = [n * (M - 1)^K + 1] / M^K$

dove P_k è il mucchio preso di notte e R_k è la rimanenza che il marinaio successivo trova dopo il passaggio del precedente.

Di conseguenza il numero Q+1 è il termine calcolato per k = M+1

3- Osservando attentamente i coefficienti di P_K , posso considerare la seguente successione:

per ogni $k \geq 1$ e per ogni $M \geq 2$ pongo:

$a_0 = 1 / M$

$a_{k+1} = (1/M) * [(M - 1) / M]^{K+1}$

Mi trovo, per definizione, davanti alla progressione geometrica.

Quindi, posto K = M – 1, i termini da considerare sono M+1 ed essi, per la successione geometrica considerata, sono:

$a_0 = P_1 / (n-1)$ …… $a_M = P_{M+1} / (n-1)$

Pertanto:

a) Se $k+1=M$ è dispari, la successione è unica e la ragione è $(M-1)/M$;

b) Se $k+1=M$ è pari ,si hanno 2 successioni: Infatti $q = \pm (M-1)/M$.

Dunque è ora possibile calcolare P.

Infatti per ogni $M \geq 2$ si ottiene, seguendo la formula della somma di una progressione geometrica:

$P = (n-1) * [M^M - (M - 1)^M] / M^M$ se M = DISPARI

(Ho fatto questa riflessione perché per la determinazione di P bisognava considerare due casi. Pertanto qui c'era il classico trabocchetto).

4- Per queste ragioni, considero le seguenti IPOTESI :

per ogni $M \geq 2$ considero i seguenti DATI ottenuti dalla traccia:

$F = P_{M+1} = (M-1)^M *(n - 1)/ M^{M+1}$

$\lambda = (n-1) - r *(n - 1)/ M^{M+1} = t *(n - 1)/ M^{M+1}$

$\delta = P - r *(n - 1)/ M^{M+1} = (\varphi - r) *(n - 1)/ M^{M+1}$

$s = \varphi - r$

$\varphi = M * [M^M - (M - 1)^M]$

$\xi = M^{M+1} * [P + (n - 1)]/ (n - 1)$

$\xi - \Delta = 2*r$

$\lambda + \delta = \Delta *(n - 1)/ M^{M+1}$

$Q + 1 = F *M^{M+1} / (n - 1)$

5- Calcolo gli interi (t + s) e (t – s) (entrambi DATI NASCOSTI)

Da λ si ricava che $t + r = M^{M+1}$ con $t = M^{M+1} - r$;

da δ si ricava che $s + r = \varphi$ con $s = \varphi - r$.

Pertanto:

a) $t - s = M*(M-1)^M$
b) Posto $\theta = (M-1)*(t + r) - (M-1)*(s + r)$ si ha $\theta = (M-1)*(t - s)$.

Essendo $\xi = [\ \theta + M*F*M^{M+1}/(n-1)\ ] + 2*r = \Delta + 2*r = (t + s) + 2*r$ per ipotesi, si ha $t + s = M * (t - s)$

Quindi, per ogni $M \geq 2$

Se

$t - s = M * F * M^{M+1}/(n-1)$

$t + s = M*(t - s)$

$r = \varphi - s = M^{M+1} - t$

allora

$t = [\ M*(M+1)*(M-1)^M\ ] / 2$

$s = [\ M*(M-1)*(M-1)^M\ ] / 2$

6-Ora posso trovare il numero (N – 1).Infatti considero quanto segue:

a) per ogni $M \geq 2$ verifico che

$\theta = (M-1) * MCD (s , t) = M*(M-1)*(M-1)^M$

b) Vado a considerare i seguenti numeri interi:

$J = s - r$

$w = s + r$

$\mu = \Delta / M$

c) Con i termini considerati nei punti 4,5 e 6 , considero il sistema formato dalle seguenti equazioni:

$X + w = \xi$

$X + J = t + s$

Risolvendo, si ottiene la soluzione $x = (t + r)*(M - 1)$

7- Riscrivo il sistema del punto 6 lettera c) , utilizzando la definizione di congruenza. Si ottiene il seguente sistema di congruenze:

$x \equiv - w \mod M$

$x \equiv - J \mod M-1$

Essendo M e M-1 numeri naturali consecutivi, il MCD (M ; M – 1) = 1.

Quindi, per il teorema cinese del resto, si ottiene la soluzione generica

$X + M*(M-1)* h = M *\mu + w$

Posto $h = (t - s)/M$ si ottiene il minimo per questo problema.

8- Adesso considero la seguente funzione (costo):

$f(x) = [ax^2 + bx + c] / x = ax + b + c/x$

Posto:

$x > 0$

$a = (Q+1)$

$b = (\varphi + r)/ 2$

$c = \Delta$

si ha che:

a) gli asintoti sono le funzioni:

$x = 0$ (asintoto verticale)

$y = (Q+1) x + (\varphi + r)/2$ (asintoto obbliquo)

b) minimo in $x = \sqrt{(c / a)} = \sqrt{(\Delta /(Q+1))} = M$

Per $x = M$ si ha $f(M) = M^{M+1}$

9 – Inoltre considero la seguente funzione (ricavo):

$g(x) = dx$

con $x > 0$ e con $d = \theta/M$

10- Quindi, con le funzioni considerate nei punti 8 e 9,possiamo considerare per ogni $x > 0$ la seguente funzione (guadagno o utile):

$g(x)-f(x) = u(x) = (d-a) x - b - c/x$

Voglio far vedere che per $x = M$ si ha $u(M) = M*(Q+1) - r$ il massimo guadagno.

Infatti, derivando la funzione $u(x)$ si ha massimo in $x = \sqrt{(c / a)} = \sqrt{(\Delta /(Q+1))} = M$

11-Pertanto dobbiamo risolvere la congruenza

$[M*(Q+1) – r] x \equiv M*(Q+1) \bmod M$

Se M=DISPARI allora MCD($M*(Q+1) – r$; M) = M divide $M*(Q+1)$.

Quindi la soluzione particolare $x(0) = (M*(Q+1) /M)*\Omega$

tale che $[M*(Q+1) – r]* \Omega + M*\Psi = M*(Q+1)$ con Ω e Ψ calcolati con l'algoritmo di Bezout.

Pertanto $x = \Omega*(Q+1) + M * ꭗ$ con $ꭗ \in Z$.

12- se M è DISPARI allora

$N = M Q + (P + 1)=M [(M-1)^M -1]+ (M*[M^M - (M - 1)^M]+1)$;

se M è PARI allora

$N = M Q + (P + M + 1)= M [(M-1)^M -1]+ (M*[M^M - (M - 1)^M]+M+1)$ come volevasi dimostrare.

Se M=5 allora N=15621, se M=2 allora N=9.