

## Probabilità di ottenere un numero pari di teste con monete truccate

Siano lanciate  $n$  monete truccate, ciascuna con probabilità  $p \in (0, 1)$  di dare **testa**. Definiamo:

$$\rho(n) = \mathbb{P}(\text{numero pari di teste})$$

### 1) Relazione ricorsiva per $\rho(n)$

Poniamo  $\rho(0) = 1$ . Definiamo  $q = 1 - p$ . Considerando l'indipendenza tra i lanci, si ha la relazione ricorsiva:

$$\rho(n) = q \cdot \rho(n-1) + p \cdot (1 - \rho(n-1)) = (1 - 2p)\rho(n-1) + p$$

### 2) Risoluzione della relazione ricorsiva

Riscriviamo la ricorrenza:

$$\rho(n) = (1 - 2p)\rho(n-1) + p, \quad \rho(0) = 1$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine. La soluzione generale è data da:

$$\rho(n) = A(1 - 2p)^n + \frac{1}{2}$$

Usando la condizione iniziale  $\rho(0) = 1$ , otteniamo:

$$1 = A + \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Quindi la soluzione esplicita è:

$$\rho(n) = \frac{1}{2}(1 + (1 - 2p)^n)$$

### 3) Somma binomiale con indici pari

Vogliamo calcolare:

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pari}}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a > 0, b > 0$$

Utilizzando le formule binomiali:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$$

Sommando:

$$(a+b)^n + (a-b)^n = \sum_{k=0}^n (1+(-1)^k) \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Poiché  $1+(-1)^k = 2$  solo per  $k$  pari:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$$

#### 4) Probabilità di ottenere un numero dispari di teste

Definiamo:

$$\pi(n) = \mathbb{P}(\text{numero dispari di teste}) = 1 - \rho(n)$$

Sostituendo:

$$\pi(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n) = \frac{1}{2}(1 - (1-2p)^n)$$

#### 5) Risultato finale

$$\rho(n) = \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n) \quad (\text{probabilità di teste pari})$$

$$\pi(n) = \frac{1}{2}(1 - (1-2p)^n) \quad (\text{probabilità di teste dispari})$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} \quad (\text{somma binomiale con } k \text{ pari})$$