Trasformazione adiabatica

Utilizzo dell'equazione delle adiabatiche ed dell'equazione di stato dei gas perfetti

Problema[(1)]

Un gas ideale monoatomico è posto in un contenitore isolato termicamente di volume $0{,}0750 m^3$. Il gas è alla pressione di 105kPa e alla temperatura di 317K.

a) Fino a quale volume è necessario comprimere il gas per aumentarne la pressione a 145kPa?

b) A quale volume il gas avrà la temperatura di 295K?

Elaborazioni

Strategia risolutiva

1. Nel testo del problema si indica che il contenitore del gas è isolato termicamente e quindi nelle trasformazioni cui sarà sottoposto non può scambiare calore con l'ambiente esterno; le trasformazioni sono per definizione adiabatiche.
2. Ricordiamo che l'equazione caratteristica di una trasformazione adiabatica è PV^γ=cost., nella quale γ, detto **coefficiente adiabatico del gas**, è il rapporto tra il calore specifico molare del gas a pressione costante C_P ed il calore specifico molare a volume costante C_V, quindi

   $$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \tag{1}$$

   Per un gas ideale con f gradi di libertà il calore specifico molare a volume costante è $C_V = \frac{f}{2} \cdot R$, mentre il calore specifico molare a pressione costante si deduce dalla relazione di Mayer : $C_P = C_V + R$.

3. Per risolvere il quesito a) si utilizza l'equazione delle adiabatiche uguagliando le espressioni della forma PV^γ relativa allo stato iniziale, di cui si conosce tutto, a quella relativa allo stato finale per il quale è fissato il valore della pressione.

   Per la risoluzione del quesito b) si veda oltre.

a) Risoluzione del quesito

Indichiamo con 1 lo stato fisico iniziale e 2 lo stato fisico per il quale la pressione deve risultare di 145kPa. Il gas è monoatomico, quindi il suo numero di gradi di libertà è f=3. I valore del calore specifico molare a volume costante è $C_V = \frac{f}{2} \cdot R = \frac{3}{2} \cdot R$; il calore specifico molare a pressione costante è $C_P = C_V + R = \frac{5}{2} \cdot R$, pertanto il coefficiente adiabatico del gas è $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$.

Scriviamo l'uguaglianza dedotta dall'equazione dell'adiabatica per i due stati 1 e 2 del gas.

[(1)] Problema proposto dalla Studentessa liceale Ch.C.

$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$, con P_1, V_1, P_2 noti. Esprimiamo V_2 in funzione della altre grandezze. Si ha:

$$V_2^\gamma = \frac{P_1V_1^\gamma}{P_2} \to V_2 = \left(\frac{P_1V_1^\gamma}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_1$$

Sostituiamo ora i valori noti P_1=105kPa, P_2=145kPa,V_1=0,075m^3, γ=5/3. Otteniamo:

$$V_2 = \left(\frac{105kPa}{145kPa}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot 0{,}075m^3 = \left(\frac{21}{29}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot 0{,}075m^3 \simeq 0{,}0618m^3$$

b) Risoluzione del quesito

Indichiamo con 3 lo stato fisico del gas nel quale la temperatura è T=295K.

b.1) Utilizziamo l'equazione di stato dei gas perfetti nei due stati 1, 3 e facciamo il rapporto membro a membro.

$\frac{P_1V_1}{P_3V_3} = \frac{nRT_1}{nRT_3} = \frac{T_1}{T_3} = \frac{317K}{295K} = 1{,}074$, da cui ricaviamo

$$P_3V_3 = \frac{P_1V_1}{1{,}074} = \frac{105kPa \cdot 0{,}075m^3}{1{,}074} = 7332J$$

b.2) Uguagliamo ora la forma PV^γ relativamente agli stati 1 e 3 del gas, elaborandola opportunamente.

$$P_3V_3^\gamma = P_1V_1^\gamma \to V_3^{\gamma-1} = \frac{P_1V_1^\gamma}{P_3V_3} = \frac{105kPa \cdot \left(0{,}075m^3\right)^\gamma}{7332J} \to V_3 = \left[\frac{105kPa \cdot \left(0{,}075m^3\right)^\gamma}{7332J}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{105kPa \cdot \left(0{,}075m^3\right)^{\frac{5}{3}}}{7332J}\right]^{\frac{3}{2}} =$$

$\left(0{,}1910156...\right)^{1,5} \simeq 0{,}08348m^3$.